Warszawa, 26 sierpnia 2024

dr hab. Tomasz Kochanek
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana mgr Damiana Głodkowskiego

pt. *Some applications of set theory in Banach spaces and operator algebras*

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Rozprawa doktorska pana mgr. Damiana Głodkowskiego dotyczy zastosowania teorii mnogości i topologii, w szczególności metod forsingu i kombinatoryki nieskończonej, do pewnych zagadnień teorii przestrzeni Banacha, C*-algebr i teorii miary. Zasadnicza część rozprawy składa się z czterech niezależnych rozdziałów, z których każdy zawiera interesujące i głębokie rezultaty.

Pierwszy z nich dotyczy badania niezmienników kardynalnych dla ideału złożonego z tych podzbiorów ustalonej, co najmniej dwuwymiarowej przestrzeni Banacha X, które dają się pokryć przeliczalną rodziną hiperpłaszczyzn. Autor zajmuje się tutaj najbardziej klasycznymi niezmiennikami: addytywnością $\mathfrak{add}(X)$, liczbą pokryciową $\mathfrak{cov}(X)$, jednorodnością $\mathfrak{non}(X)$ oraz kofinalnością $\mathfrak{cof}(X)$. Odpowiednie przeformułowanie wyników z pracy V. Klee (*Math. Scand.* 1958) pozwala wyznaczyć wartości wymienionych niezmienników dla wszystkich ośrodkowych przestrzeni Banacha. Jak pokazuje autor, w przypadku nieośrodkowym wartości $\mathfrak{add}(X) = \omega_1$ i $\mathfrak{cof}(X) = |X^*|$ są jednoznacznie wyznaczone, jednak niezmienniki $\mathfrak{cov}(X)$ i $\mathfrak{non}(X)$ dają się jedynie oszacować, a konkretne ich własności zależą od dodatkowych założeń teoriomnogościowych.

Druga część rozprawy zawiera rozwiązanie problemu postawionego przez A. Pełczyńskiego, który był zainspirowany podaną przez P. Koszmidera (*Math. Ann.* 2004) konstrukcją nierozkładalnej przestrzeni Banacha $C(K)$ z małą ilością operatorów (tzn. gdzie każdy ograniczony operator liniowy jest słabo zwartą perturbacją operatora mnożenia). Problem Pełczyńskiego dotyczył istnienia zwartej przestrzeni Hausdorffa K o dowolnie ustalonym skończonym wymiarze pokryciowym i o tej własności, że izomorfizm przestrzeni Banacha $C(K) \sim C(L)$ wymusza równość $\dim(K) = \dim(L)$. Autor wykazuje istnienie takiej przestrzeni przy założeniu aksjomatu $(\diamondsuit)$ Jensena.

Kolejna, najbardziej rozbudowana część rozprawy zawiera poważny wkład w badania nad związkami między własnościami A. Grothendiecka i O. Nikodyma algebr Boole'a, które wprowadził do literatury W. Schachermayer (*Dissertationes Math.* 1982) inspirowany klasycznymi wynikami Grothendiecka (*Canad. J. Math.* 1953) i Nikodyma (*Monatsh. Math. Phys.* 33). Pierwszy z nich mówi, że w przestrzeni dualnej ℓ_∞^* wszystkie ciągi *-słabo zbieżne muszą być słabo zbieżne, a drugi – że punktowo ograniczona rodzina miar wektorowych określonych na σ-ciele musi być jednostajnie ograniczona. Ta ostatnia własność daje się zupełnie

Th

analogicznie zdefiniować w języku algebr Boole'a, natomiast własność Grothendiecka algebry Boole'a $\mathbb{A}$ oznacza, że przestrzeń $C(\mathrm{St}(\mathbb{A}))$ funkcji ciągłych na przestrzeni Stone'a algebry $\mathbb{A}$ ma własność przestrzeni ℓ_∞ wyrażoną we wspomnianym wyżej twierdzeniu Grothendiecka. Przy założeniu Hipotezy Continuum CH M. Talagrand (*Studia Math.* 1984) pokazał, że istnieje algebra Boole'a z własnością Grothendiecka, która nie ma własności Nikodyma, i do tej pory był to jedyny znany przykład. W swojej rozprawie Autor, używając metod forsingowych dowodzi, że przykład takiej algebry istnieje również w modelu ZFC, w którym nie jest prawdziwa CH.

Ostatnia część pracy dotyczy problemu zanurzania ℓ_∞-sumy prostej algebry Calkina $\mathcal{Q}(\ell_2)$ w samą algebrą $\mathcal{Q}(\ell_2)$. Uzyskany przez pana Głodkowskiego wynik jest nieprzemienną wersją wcześniejszego rezultatu autorstwa C. Brech i P. Koszmidera (*Fund. Math.* 2014) i mówi on, że w modelu Cohena $\ell_\infty(\mathcal{Q}(\ell_2))$ nie jest izomorficzna z C*-podalgebrą $\mathcal{Q}(\ell_2)$.

Wyniki opisane w rozdziałach 2–4 rozprawy oparte są trzech pracach Doktoranta: napisanej wspólnie z Promotorem, prof. Koszmiderem pracy opublikowanej w *Proc. Amer. Math. Soc.*, jednoautorskiej pracy opublikowanej w *J. Funct. Anal.* oraz na artykule napisanym wspólnie z panią A. Widz, który dostępny jest w systemie `arXiv`.

2. Główne tezy i ocena rozprawy

Pierwszy rozdział zawiera streszczenie przedstawionych w rozprawie wyników, jak również służy ustaleniu notacji oraz wprowadzeniu i przypomnieniu niezbędnych pojęć z różnych działów matematyki.

Rozdział drugi zawiera wyniki uzyskane przez Autora we współautorskiej pracy:

D. Głodkowski, P. Koszmider, *On coverings of Banach spaces and their subsets by hyperplanes*, Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), 817–831.

Jeden z głównych wyników tego rozdziału podaje następujące oszacowania na niezmienniki kardynalne ideału $\mathcal{I}(X)$ podzbiorów przestrzeni Banacha X, które można pokryć przeliczalną rodziną hiperpłaszczyzn, tj. domkniętych podprzestrzeni kowymiaru 1. Jeżeli mianowicie X jest przestrzenią Banacha wymiaru większego od 1, to $\omega_1 \leqslant \mathfrak{cov}(X) \leqslant \mathfrak{c}$ oraz $\mathrm{dens}(X) \leqslant \mathfrak{non}(X) \leqslant \mathrm{cf}([\mathrm{dens}(X)]^\omega)$, jak również $\mathfrak{add}(X) = \omega_1$ oraz $\mathfrak{cof}(X) = |X^*|$. To powoduje, że bardziej interesująca do badań jest pierwsza z wymienionych par niezmienników. Przy dodatkowych założeniach, jak np. Uogólniona Hipoteza Continuum, niezmienniki te przyjmują jednoznaczne wartości: $\mathfrak{cov}(X) = \omega_1$, a $\mathfrak{non}(X)$ jest równe gęstości $\mathrm{dens}(X)$ lub jej następnikowi w zależności od tego czy kofinalność $\mathrm{dens}(X)$ jest przeliczalna, czy też nie. Interesującą obserwacją jest to, że jeśli tylko przestrzeń X daje się pokryć przez ω_1 hiperpłaszczyzn, to $\mathrm{cov}(X) = \omega_1$, a dzieje się tak dla szerokiej klasy przestrzeni Banacha, np. tych, które zawierają fundamentalny układ biortogonalny, czy też tych, które zawierają izomorficzną kopię $\ell_1(\omega_1)$, jak również dla przestrzeni $C(K)$, gdzie K jest rozproszoną zwartą przestrzenią Hausdorffa. Podobnie w przypadku niezmiennika $\mathfrak{non}(X)$ otrzymujemy konkretną wartość $\mathrm{cf}([\mathrm{dens}(X)]^\omega)$, o ile X zawiera fundamentalny układ biortogonalny. Metody dowodowe wymienionych twierdzeń oparte są na podstawowych własnościach hiperpłaszczyzn oraz standardowych metodach pozaskończonych i technikach związanych z układami biortogonalnymi; dowody są jednak dalece nietrywialne. Ciekawym pomysłem jest na przykład przejście do badania $\mathfrak{cov}(X)$ dla podprzestrzeni $\ell_\infty(\omega_1)$, co jest możliwe z uwagi na to, że dla dowolnej nieośrodkowej przestrzeni Banacha X istnieje ograniczony operator $X \to \ell_\infty(\omega_1)$ o nieośrodkowym obrazie. Wyznaczenie rozważanych niezmienników w przypadku ośrodkowym, które (jak wspomnieliśmy wcześniej) zawarte jest w zasadzie w pracy Klee, również

th

wymagało pewnego wysiłku w celu odpowiedniego przeformułowania zawartych w tej pracy rozważań.

Treść rozdziału trzeciego oparta jest na jednoautorskiej pracy Doktoranta:

D. Głodkowski, *A Banach space $C(K)$ reading the dimension of K*, J. Funct. Anal. 285 (2023), paper no. 109986,

która zawiera rozwiązanie trudnego problemu Pełczyńskiego. Główny wynik mówi, że pod założeniem ($\diamondsuit$) dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje taka zwarta przestrzeń Hausdorffa K, że $\dim(K) = k$ oraz dla dowolnej zwartej przestrzeni Hausdorffa L izomorfizm $C(K) \sim C(L)$ implikuje, że $\dim(L) = k$. Zasadniczym krokiem dowodowym było uzyskane przez Doktoranta twierdzenie wzmacniające znane wcześniej własności przestrzeni $C(K)$ z małą ilością operatorów. Jeżeli mianowicie K jest ośrodkową, spójną, zwartą przestrzenią Hausdorffa oraz każdy operator $T \in \mathcal{B}(C(K))$ ma postać $T = gI + S$, gdzie I jest identycznością, $g \in C(K)$, a S jest słabo zwarty, to izomorfizm $C(K) \sim C(L)$ implikuje, że K i L są homeomorficzne z dokładnością do podzbiorów skończonych. Dowody tych twierdzeń są niezwykle złożone, jednak Autor poza nienaganną prezentacją wszystkich technicznych szczegółów umiejętnie tłumaczy główne idee (np. wprowadzenie pojęcia *essential-preserving maps*), które pozwoliły dokonać odpowiedniej, daleko idącej modyfikacji wcześniejszej konstrukcji nierozkładalnej przestrzeni $C(K)$ wprowadzonej przez P. Koszmidera. Warto również zaznaczyć, że dowody wymagały użycia sporej dawki wiedzy z topologii; pokazują one też niezwykłą biegłość Autora w posługiwaniu się rozważaniami natury kombinatorycznej (np. użycie lematu Rosenthala w dowodzie Proposition 3.4.2).

Najdłuższą częśc rozprawy stanowi rozdział czwarty, oparty na imponującej pracy:

D. Głodkowski, A. Widz, *Epic math battle of history: Grothendieck vs Nikodym*, `arXiv:2401.13145` (2024).

Autorzy dowodzą, że niesprzecznie z $\neg\mathsf{CH}$ istnieje algebra Boole'a $\mathbb{A}$ mocy ω_1, która ma własność Grothendiecka, ale nie ma własności Nikodyma, co stanowi wspaniały krok na drodze do zrozumienia związku między tymi dwiema własnościami, jak również uzupełnia wcześniejszy wynik Talagranda oparty na założeniu CH. W swojej rozprawie Doktorant lojalnie przyznaje, że główne idee konstrukcji algebry $\mathbb{A}$ oparte są na pomysłach Talagranda. Trzeba jednak zaznaczyć, że odpowiednie zmodyfikowanie tych idei i połączenie ich z metodami forsingowymi wymagało niezwykłej pomysłowości i wiedzy. Punktem wyjścia, podobnie jak w konstrukcji Talagranda, było użycie pewnej własności symetrii borelowskich podzbiorów zbioru Cantora $\mathcal{C}$, która związana jest z odpowiednio równomiernym rozłożeniem znaków ± 1 współrzędnych elementów danego podzbioru. Zbiory takie nazywamy semi-zbalansowanymi i, jak się okazuje, jeżeli algebra Boole'a $\mathbb{B} \subset \mathrm{Bor}(\mathcal{C})$ składa się tylko ze zbiorów semi-zbalansowanych, to nie może mieć własności Nikodyma. Użyte w dowodzie pojęcie forsingu, inspirowane pracami P. Koszmidera (*Trans. Amer. Math. Soc.* 1999) i R.A.S. Fajardo (*Fund. Math.* 2009), rozrzesza przeliczalne algebry zbalansowane zachowując własność zbalansowania (a zatem wykluczając własność Nikodyma), jednak pozbywając się w rozszerzeniu pewnych *-słabo zbieżnych ciągów miar. Dowód jest niezwykle złożony i poza zaawansowanymi metodami teoriomnogościowymi korzysta z równie głębokich narzędzi analitycznych, takich jak np. lemat Kadeca–Pełczyńskiego–Rosenthala o rozbiciu ograniczonego ciągu miar, który użyty został w celu wykazania własności Grothendiecka odpowiedniej algebry Boole'a (zob. Proposition 4.2.13) oraz probabilistyczna nierówność Kahane użyta w najbardziej skomplikowanej

Ł

części dowodu. Podobnie jak w rozdziale trzecim, tak i tutaj, Autor umiejętnie tłumaczy ogólne idee i strategię dowodową, opisaną we fragmencie zatytułowanym *Construction roadmap*, co znacząco ułatwia czytelnikowi lekturę i zrozumienie technicznych zawiłości.

W ostatnim rozdziale rozprawy Autor dowodzi twierdzenia, które mówi, że w modelu Cohena ℓ_∞-suma algebry Calkina, tj. $\ell_\infty(\mathcal{Q}(\ell_2))$ nie zanurza się jako C*-algebra w $\mathcal{Q}(\ell_2)$. Daje to w szczególności nowy dowód twierdzenia z pracy doktorskiej A. Vaccaro (2019) o tym, że w modelu Cohena $\mathcal{Q}(\ell_2)$ nie jest $\mathfrak{c}$-uniwersalna. Dowód tego wniosku jest jednak istotnie inny, bowiem argumentacja Vaccaro opierała się na tym, że algebra $\mathcal{Q}(\ell_2)$ nie zawiera dobrze uporządkowanego, ściśle rosnącego ciągu projekcji długości ω_2, podczas gdy powód niezanurzalności algebry $\ell_\infty(\mathcal{Q}(\ell_2))$ w $\mathcal{Q}(\ell_2)$ jest inny – każdy bowiem ciąg projekcji w $\ell_\infty(\mathcal{Q}(\ell_2))$ o wymienionych własnościach generowałby podobny ciąg w samej algebrze $\mathcal{Q}(\ell_2)$. Zasadniczą część dowodu głównego twierdzenia rozdziału piątego stanowi Proposition 5.3.2 ze złożonym dowodem, gdzie istotną rolę odgrywają rozumowania kombinatoryczne, np. użycie lematu o Δ-systemie. Rozprawa kończy się ciekawym wynikiem mówiącym o tym, że w modelu Cohena korona stabilizacji algebry Calkina, tj. algebra $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(\ell_2) \otimes \mathcal{K}(\ell_2))$ nie zanurza się jako C*-podalgebra w $\mathcal{Q}(\ell_2)$.

Zawartość merytoryczną pracy oceniam bardzo wysoko i nie mam wątpliwości, że przewyższa ona poziom, który jest wymagany od rozpraw doktorskich z matematyki. Zawarte w rozprawie wyniki są imponujące, a ich dowody świadczą o niezwykłym talencie i wiedzy Doktoranta. Rozprawa jest ponadto napisana bardzo starannie i pomimo dużej technicznej złożoności przedstawianych rozumowań, prezentuje je w sposób całkowicie przejrzysty. Jedyne uwagi redakcyjne to ta dotycząca rozpoczynania zdań od symboli matematycznych (np. wiersz 8 na str. 16, wiersz 22 na str. 19) oraz używania słowa '*which*' zamiast '*that*' w sytuacji, gdy rozważana własność opisuje dany obiekt w sposób restryktywny (np. wiersz 3 od dołu str. 53). Są to oczywiście drobne usterki redakcyjne, które w żaden sposób nie wpływają na ogólną, bardzo wysoką ocenę rozprawy.

3. Konkluzja

Uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska pana mgr. Damiana Głodkowskiego zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz z naddatkiem spełnia wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, jak i wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Damiana Głodkowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Proponuję także, aby Komisja Doktorska rozważyła możliwość wyróżnienia rozprawy.

Tomasz Kochanek