Autoreferat

Piotr Achinger

Adres: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

Email: pachinger@impan.pl

www: http://achinger.impan.pl/

Dyplomy i stopnie naukowe

2010 Magister Matematyki, Uniwersytet Warszawski
Praca magisterska: *Frobenius Push-Forwards on Quadrics*
promotor: Prof. dr hab. Adrian Langer

2012 Magister Informatyki, Uniwersytet Warszawski
Praca magisterska: *Logiki* MSO *oraz* MSO + U
promotor: Prof. dr hab. Mikołaj Bojańczyk

2015 Ph.D., University of California at Berkeley
Praca doktorska: $K(\pi,1)$ *Spaces in Algebraic Geometry*
promotor: Prof. Arthur Ogus

Dotychczasowe zatrudnienie

2015–16 *EPDI Postdoc*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (Centrum Banacha)

2016–17 *EPDI Postdoc*, Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES)

2016– *Adiunkt*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

2019 *Berlekamp Postdoc*, Mathematical Sciences Research Institute (MSRI)

Osiągnięcie habilitacyjne

Deformacje, degeneracje i typy homotopii rozmaitości algebraicznych

[Hab1] Piotr Achinger, Maciej Zdanowicz
Some elementary examples of non-liftable varieties
Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 4717-4729
DOI: 10.1090/proc/13622

[Hab2] Piotr Achinger, Maciej Zdanowicz
Serre–Tate theory for Calabi–Yau varieties
J. Reine Angew. Math. (2021)
DOI: 10.1515/crelle-2021-0041

[Hab3] Piotr Achinger, Jakub Witaszek, Maciej Zdanowicz
Global Frobenius liftability I
J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 23 (2021), no. 8, 2601–2648.
DOI: 10.4171/JEMS/1063

[Hab4] Piotr Achinger
Wild ramification and $K(\pi,1)$ spaces
Invent. Math. 210 (2017), no. 2, 453–499
DOI: 10.1007/s00222-017-0733-5

[Hab5] Piotr Achinger, Mattia Talpo
Betti realization of varieties defined by formal Laurent series
Geom. Topol. 25 (2021), 1919–1978
DOI: 10.2140/gt.2021.25.1919

Spis treści

1. Wstęp

Geometria algebraiczna bada obiekty geometryczne zdefiniowane w algebraiczny sposób. Bazowym obiektem są rozmaitości (ogólniej: schematy) afiniczne, opisane jako zbiór zer układu równań wielomianowych wielu zmiennych o współczynnikach w ciele k. Jeżeli $k = \mathbf{C}$ jest ciałem liczb zespolonych, wtedy pomocą w rozumieniu rozmaitości algebraicznych służą analiza zespolona oraz topologia algebraiczna. Jednakże w omawianych badaniach skupimy się na ciałach innych niż $\mathbf{C}$, takich jak ciała dodatniej charakterystyki czy ciała z normą niearchimedesową. Pewną uwagę poświęcimy też pierścieniom bazowym które nie zawierają ciała (tzw. przypadek mieszanej charakterystyki), takim jak pierścienie $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ dla $r > 1$ i liczby pierwszej p, czy pierścień *liczb p-adycznych*

$$\mathbf{Z}_p = \varprojlim_r \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}.$$

Szczególną rolę w moich badaniach pełnią algebraiczne zamienniki metod topologicznych i analitycznych. Topologia algebraiczna ma na celu badanie przestrzeni topologicznych (zazwyczaj z dokładnością do homotopii) poprzez przypisywanie im łatwiejszych do analizy niezmienników algebraicznych, takich jak grupa podstawowa, grupy homologii i kohomologii, czy wyższe grupy homotopii. Okazuje się, że owe niezmienniki w przypadku zespolonej rozmaitości algebraicznej X (mówiąc dokładniej, odpowiadającej jej przestrzeni topologicznej X_{top}) nie tylko znajdują bezpośrednie zastosowanie, ale też mają one dużo więcej bogatej struktury, która odzwierciedla algebraiczne własności X które zostają zapomniane przy przejściu do X_{top}. Przykładem takiej struktury jest struktura Hodge'a na grupach kohomologii $H^*(X_{\mathrm{top}}, \mathbf{C})$ [Voi02, §7], która zgodnie z hipotezą Hodge'a [Voi16] zawiera informacje o cyklach algebraicznych na X, czyli o pewnych klasach równoważności algebraicznych podrozmaitości X.

Nad ogólnym ciałem k, niemożność zastosowania metod topologii algebraicznej bezpośrednio skłania nas do prób zdefiniowania grup kohomologii i pokrewnych im niezmienników w algebraiczny sposób. Najsłynniejszą tego typu konstrukcją są kohomologie etalne i etalna grupa podstawowa, zdefiniowane przez Artina i Grothendiecka [SGA03, SGA73] i uogólnione do etalnego typu homotopii przez Artina i Mazura [AM69]. Kiedy grupa Galois ciała k jest duża (np. ciała liczbowe), jej działanie na ℓ-adycznych kohomologiach etalnych $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ jest arytmetycznym odpowiednikiem struktury Hodge'a. Zgodnie z hipotezą Tate'a [Tot17], owo działanie jest związane z cyklami algebraicznymi. Dodatkowo, rozmaitości algebraiczne są w ten sposób naturalnym źródłem reprezentacji Galois, grającymi centralną rolę w programie Langlandsa.

Jeżeli ciało k jest podciałem ciała liczb zespolonych $\mathbf{C}$, wówczas algebraicznie zdefiniowane niezmienniki topologiczne zazwyczaj łatwo porównać z tymi otrzymanymi przez zastosowanie topologii algebraicznej nad $\mathbf{C}$. Dla przykładu, dla rozmaitości X nad k oraz wyboru zanurzenia $\overline{k} \hookrightarrow \mathbf{C}$ istnieje naturalny izomorfizm

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{\mathbf{C}})_{\mathrm{top}}, \mathbf{Q}_\ell) \tag{1.1}$$

pomiędzy kohomologiami ℓ-adycznymi X a kohomologiami singularnymi $(X_{\mathbf{C}})_{\mathrm{top}}$. Pozwala to na mieszanie metod arytmetycznych (reprezentacje Galois) z topologicznymi i analitycznymi (teoria Hodge'a). Pewną przeszkodą jest jednak fakt, że typ homotopii przestrzeni topologicznej $(X \otimes_k \mathbf{C})_{\mathrm{top}}$, np. jego grupa podstawowa [Ser64] czy pierścień kohomologii singularnych o współczynnikach wymiernych [Cha09], może zależeć od wyboru zanurzenia $\overline{k} \hookrightarrow \mathbf{C}$.

W przypadku gdy k ma charakterystykę $p > 0$, zanurzenie k w $\mathbf{C}$ nigdy nie istnieje. Jest jednak cień szansy na użycie metod analitycznych i topologicznych i w tym przypadku. Na przykład, gdy $k = \mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, możemy spróbować podnieść daną rozmaitość X nad k do charakterystyki zero, czyli znaleźć rozmaitość (schemat) $\widetilde{X}$ nad $\mathbf{Z}_p$ dla którego $\widetilde{X} \otimes k \simeq X$. Ponieważ $\mathbf{Z}_p$ zanurza się w $\mathbf{C}$, możemy zastosować teorię Hodge'a i pokrewne techniki do $\widetilde{X} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{C}$. Jakkolwiek jest to bardzo obiecująca i istotnie owocna technika, istnieją dwie zasadnicze przeszkody w jej stosowaniu:

(a) podniesienie $\widetilde{X}$ może nie istnieć (powiemy wtedy, że X jest rozmaitością niepodnoszalną do charakterystyki zero),

(b) podniesień $\widetilde{X}$ jest często dużo i może nie być jasne, które z nich najlepiej odzwierciedla interesujące nas własności X.

Problemy te są ściśle związane z teorią deformacji rozmaitości algebraicznych w dodatniej charakterystyce. W szczególnym przypadku zwyczajnych rozmaitości abelowych, istotnym z punktu widzenia arytmetyki, teoria Serre'a–Tate'a [Kat81] stanowi rozwiązanie problemu (b), oferując kanoniczne podniesienia p-adyczne.

Geometria algebraiczna w dodatniej charakterystyce różni się na kilka zasadniczych sposobów od geometrii w charakterystyce zerowej. Po pierwsze, ponieważ nad ciałem k charakterystyki p podnoszenie do p-tej potęgi jest addytywne, tj. zachodzi wzór

$$(X+Y)^p = X^p + Y^p,$$

każda rozmaitość X nad k jest wyposażona w naturalny endomorfizm, tzw. morfizm Frobeniusa $F_X \colon X \to X$. W wielu sensach wynagradza on nam brak dostępu do metod analitycznych nad k; w rzeczywistości, wiele fundamentalnych rezultatów w geometrii algebraicznej, takich jak kluczowe z punktu widzenia geometrii biwymiernej twierdzenie Kodairy o znikaniu, tradycyjnie dowodzonych za pomocą analizy zespolonej, można też (dużo łatwiej) udowodnić za pomocą redukcji do dodatniej charakterystyki i morfizmu Frobeniusa [DI87]. Niestety, morfizm Frobeniusa bardzo rzadko podnosi się do charakterystyki zerowej, gdzie w ogóle większość rozmaitości nie posiada nietrywialnych endomorfizmów.

Druga zasadnicza różnica dotyczy typów homotopii, a szczególnie etalnej grupy podstawowej, i ma związek ze zjawiskiem dzikiego rozgałęzienia (ramifikacji). Dla przykładu, odwzorowanie Artina–Schreiera

$$f(z) = z - z^p \colon \mathbf{A}^1_k \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$$

jest p-krotnym nakryciem etalnym prostej afinicznej $\mathbf{A}^1_k$ nią samą. (Istotnie, ten morfizm jest etalny ponieważ $f'(z) = 1 - pz^{p-1} = 1$.) Zatem prosta afiniczna nie jest jednospójna; w istocie, hipoteza Abhyankara udowodniona przez Raynauda [Ray94] stanowi, że w pewnym precyzyjnym sensie prawie każda grupa skończona jest ilorazem etalnej grupy podstawowej $\mathbf{A}^1_k$. Jednak wszystkie nakrycia prostej są dziko rozgałęzione nad punktem w nieskończoności. Problemy z dzikim rozgałęzieniem stoją na przeszkodzie w zrozumieniu etalnych typów homotopii w dodatniej i mieszanej charakterystyce.

Próby zrozumienia różnicy pomiędzy charakterystyką p a charakterystyką zero oraz związana z nią potrzeba geometrii analitycznej mającej bliższy związek z algebrą poskutkowały bujnym rozwojem geometrii niearchimedesowej w ostatnich latach. Geometria niearchimedesowa jest odpowiednikiem zespolonej geometrii analitycznej nad ciałami zupełnymi względem normy niearchimedesowej, takimi jak ciało liczb p-adycznych $\mathbf{Q}_p$ czy ciało zespolonych szeregów formalnych Laurenta $\mathbf{C}((t))$. Konstrukcja i badanie kohomologii etalnych rozmaitości niearchimedesowych ma zasadnicze znaczenie dla programu Langlandsa [Dri74, Dri76, SS91, Car90]. Istnieje też bardzo ważny p-adyczny wariant teorii Hodge'a, rozszerzonej na przypadek dowolnych rozmaitości niearchimedesowych w [Sch13]. W pewnym sensie, niearchimedesowa geometria p-adyczna stoi w pół drogi pomiędzy geometrią w charakterystyce zero a geometrią w dodatniej charakterystyce [Sch18]. Z innej strony, badanie rozmaitości niearchimedesowych nad ciałem $\mathbf{C}((t))$ pozwala na ciekawy wgląd w zjawisko degeneracji zespolonych rozmaitości algebraicznych.

W pracach składających się na osiągnięcie habilitacyjne z jednej strony badam i konstruuję typy homotopii rozmaitości algebraicznych i pokrewnych im analitycznych rozmaitości niearchimedesowych, z drugiej zaś staram się zrozumieć różnicę pomiędzy geometrią algebraiczną w dodatniej charakterystyce i w charakterystyce zerowej poprzez badanie podniesień rozmaitości algebraicznych w stronę charakterystyki zero, jak też podniesień ich morfizmu Frobeniusa. I tak:

- ⋆ W pracy [Hab1] (wspólnej z M. Zdanowiczem) stosujemy technikę „spychania podniesień" w teorii deformacji w celu skonstruowania dośc elementarnych i minimalnych przykładów rozmaitości w dodatniej charakterystyce które nie podnoszą się do charakterystyki zero.

- ⋆ W pracy [Hab2] (również wspólnej z M. Zdanowiczem) konstruujemy warianty teorii Serre'a–Tate'a dla rozmaitości Calabiego–Yau w charakterystyce p, pokazując, że częstokroć takie rozmaitości mają preferowane (kanoniczne) podniesienia do charakterystyki zero lub modulo p^2.

- ⋆ W pracy [Hab3] (z J. Witaszkiem i M. Zdanowiczem) stawiamy hipotezę charakteryzującą rozmaitości w charakterystyce p, które podnoszą się modulo p^2 wraz z morfizmem Frobeniusa, i potwierdzamy ją w szczególnych przypadkach rozmaitości log Calabiego–Yau oraz rozmaitości jednorodnych.

- ⋆ W pracy [Hab4] pokazuję, że każda rozmaitość afiniczna w dodatniej charakterystyce jest przestrzenią $K(\pi, 1)$ w topologii etalnej (tj. ma zerowe etalne wyższe grupy homotopii), co jest pierwszym wynikiem na temat typów homotopii rozmaitości afinicznych wymiaru > 1 w dodatniej charakterystyce. Podobnie, każda afinoidalna rozmaitość niearchimedesowa w dodatniej lub mieszanej charakterystyce jest przestrzenią $K(\pi, 1)$.

⋆ W pracy [Hab5] (wspólnej z M. Talpo) za pomocą geometrii logarytmicznej konstruujemy typ homotopii $\Psi(X)$ rozmaitości algebraicznej lub niearchimedesowej X nad ciałem $\mathbf{C}((t))$, tzw. typ homotopii Bettiego, o podobnych własnościach do typu homotopii X_{top} w przypadku ciała liczb zespolonych. Szereg pomocniczych twierdzeń pozwala porównać typ homotopii $\Psi(X)$ z innymi konstrukcjami, np. z etalnym typem homotopii.

Po rozdziale zawierającym omówienie pojęć i technik z geometrii w charakterystyce p oraz teorii deformacji (§2) omówimy w kolejnych rozdziałach (§3–7) prace [Hab1]–[Hab5].

2. Omówienie pojęć

W tym rozdziale omówimy niektóre potrzebne pojęcia i wyniki dotyczące geometrii algebraicznej w dodatniej i mieszanej charakterystyce: morfizm Frobeniusa i jego podniesienia, kohomologie de Rhama, kohomologie krystaliczne i F-kryształy. Omówimy też niektóre aspekty teorii deformacji, w szczególności twierdzenie Deligne'a–Illusiego o kompleksie de Rhama rozmaitości podnoszalnej modulo p^2. Czytelnik mniej więcej zaznajomiony z tym materiałem może opuścić ten rozdział, wracając do niego w razie potrzeby.

2.1. Morfizm Frobeniusa

2.1.1. **Absolutny i relatywny morfizm Frobeniusa.** Niech p będzie liczbą pierwszą. Ponieważ współczynniki dwumianowe $\binom{p}{i}$ są podzielne przez p dla $0 < i < p$, wzór Newtona

$$(x+y)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} x^i y^{p-i}$$

pokazuje, że jeżeli R jest $\mathbf{F}_p$-algebrą, wówczas odwzorowanie $F_R\colon R \to R$ zdefiniowane przez $F_R(x) = x^p$ jest homomorfizmem pierścieni. Endomorfizm F_R nazywamy *morfizmem Frobeniusa* pierścienia R. Indukuje on identyczność na spektrum $\mathrm{Spec}(R)$. Pierścień R nazywamy *doskonałym* jeżeli morfizm Frobeniusa F_R jest izomorfizmem.

Podobnie, jeżeli X jest schematem nad $\mathbf{F}_p$, wówczas morfizm schematów $F_X\colon X \to X$ zdefiniowany jako

$$(\mathrm{id}\colon |X| \to |X|, f \mapsto f^p\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X)$$

nazywamy *(absolutnym) morfizmem Frobeniusa* schematu X. Jeżeli $X = \mathrm{Spec}(R)$ dla algebry R nad $\mathbf{F}_p$, to F_X jest morfizmem schematów indukowanym przez F_R. Dla dowolnego morfizmu $f\colon Y \to X$ kwadrat

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F_Y"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "F_X"'] & X \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

jest przemienny.

Niech $f\colon X \to S$ będzie morfizmem $\mathbf{F}_p$-schematów. Wówczas przez X' oznaczamy cofnięcie (pull-back) schematu X wzdłuż absolutnego Frobeniusa $F_S\colon S \to S$. Wówczas z przemienności

(2.1) dla f mamy następujący diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "F_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& X' \arrow[r, "W_{X/S}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
& S \arrow[r, "F_S"'] & S.
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Morfizm $F_{X/S} \colon X \to X'$ nazywamy *relatywnym morfizmem Frobeniusa* X/S. Wszystkie poziome strzałki w powyższym diagramie są homeomorfizmami.

Jeżeli $S = \mathrm{Spec}(k)$ dla ciała doskonałego k, wówczas F_S jest izomorfizmem. Zatem i morfizm $W_{X/S}$ w diagramie (2.2) jest izomorfizmem, czyli schematy X' i X są izomorficzne. Natomiast nie muszą być one izomorficznymi k-schematami.

2.1.2. **Podniesienia Frobeniusa.** Niech R będzie pierścieniem takim, że p należy do radykału Jacobsona R (np. R jest p-adycznie zupełny). Wówczas *podniesieniem Frobeniusa* na R nazywamy dowolny endomorfizm $\widetilde{F} \colon R \to R$ dla którego kwadrat

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{F}"'] & R/pR \arrow[d, "F_{R/pR}"] \\
R \arrow[r] & R/pR
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Innymi słowami, $\widetilde{F}(x) \in x^p + pR$ dla dowolnego $x \in R$.

2.1.3. **Wektory Witta.** Niech R będzie doskonałą $\mathbf{F}_p$-algebrą. Wówczas istnieje (zob. [Ser79, Ch. II, §6]) jedyna z dokładnością do jedynego izomorfizmu p-adycznie zupełna $\mathbf{Z}_p$-algebra $W(R)$ bez p-torsji wraz z izomorfizmem

$$W(R)/pW(R) \xrightarrow{\sim} R.$$

Pierścień $W(R)$ nazywamy *pierścieniem wektorów Witta* pierścienia R. Dla $n \geq 1$, jego ilorazy $W_n(R) = W(R)/p^n W(R)$ nazywamy *pierścieniami wektorów Witta długości* n. Dla przykładu, $W(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}_p$ oraz $W_n(\mathbf{F_p}) = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Jeżeli k jest ciałem doskonałym, wówczas $W(k)$ jest zupełnym pierścieniem dyskretnej waluacji z parametrem lokalnym p i ciałem rezidualnym k. Z funktorialności, pierścienie $W(R)$ oraz $W_n(R)$ są wyposażone w kanoniczne podniesienie Frobeniusa, oznaczane przez F.

Konstrukcje $R \mapsto W(R)$ oraz $R \mapsto W_n(R)$ rozszerzają się do funktorów z kategorii pierścieni do kategorii pierścieni, choć w tej ogólności własność uniwersalna $W(R)$ jest trudniejsza do opisania. Istnieją funktorialne bijekcje $W(R) \simeq \prod_{i=0}^{\infty} R$ oraz $W_n(R) \simeq \prod_{i=0}^{n-1} R$, a naturalne rzutowanie $W(R) \to W_n(R)$ jest utożsamione z rzutowaniem $\prod_{i=0}^{\infty} R$ na pierwsze n współrzędnych. Jeżeli R jest $\mathbf{F}_p$-algebrą, wówczas morfizm

$$(f_0, f_1, \ldots) \quad \mapsto \quad (f_0^p, f_1^p, \ldots)$$

indukuje kanoniczne podniesienie Frobeniusa na $W(R)$. Operacje dodawania i mnożenia na $W(R)$ są opisane pewnymi uniwersalnymi wielomianami od współrzędnych. Dla wektorów Witta długości dwa $W_2(R)$ gdzie R jest $\mathbf{F}_p$-algebrą, wzory te mają postać

$$\begin{aligned}(f_0,f_1)+(g_0,g_1) &= (f_0+g_0, f_1+g_1-P(f_0,f_1))\\ (f_0,f_1)\cdot(g_0,g_1) &= (f_0g_0, f_0^p g_1 + g_0^p f_1),\end{aligned}$$

gdzie $P(X,Y) = ((X+Y)^p - X^p - Y^p)/p \in \mathbf{Z}[X,Y]$.

2.2. Kohomologie de Rhama

2.2.1. **Definicja kohomologii de Rhama.** Niech $f\colon X \to S$ będzie gładkim morfizmem schematów i niech $\Omega^i_{X/S} = \wedge^i \Omega^1_{X/S}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden system $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$-liniowych odwzorowań $d\colon \Omega^i_{X/S} \to \Omega^{i+1}_{X/S}$ ($i \geq 0$), takich że $d\colon \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/S}$ jest uniwersalnym różniczkowaniem, tworzących kompleks ($d^2 = 0$) i spełniających regułę Leibniza

$$d(x \wedge y) = (dx) \wedge y + (-1)^p x \wedge dy$$

dla przekrojów lokalnych $x \in \Omega^p_{X/S}$ oraz $y \in \Omega^q_{X/S}$ [Gro67, 16.6.2]. Kompleks

$$\Omega^\bullet_{X/S} = \left[\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_{X/S} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X/S} \to \cdots\right]$$

nazywamy *kompleksem de Rhama X/S*. Jego wyższe obrazy proste

$$R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}, \qquad i \geq 0$$

nazywamy *(algebraicznymi) kohomologiami de Rhama X/S*.

Jeżeli $X \to S$ jest morfizmem kwazi-zwartym i kwazi-separowalnym, wówczas $R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ są kwazi-koherentnymi $\mathcal{O}_S$-modułami. Jeżeli $S = \mathrm{Spec}(R)$ jest afiniczny, wówczas moduły hiperkohomologii

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X/S) = H^i(X, \Omega^\bullet_{X/S}), \qquad i \geq 0$$

są R-modułami odpowiadającymi $R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}$, tj. $\Gamma(S, R^i f_* \Omega^\bullet_{X/S}) \simeq H^i(X, \Omega^\bullet_{X/S})$. W tym przypadku $H^i_{\mathrm{dR}}(X/S)$ również nazywamy kohomologiami de Rhama X/S.

2.2.2. **Dwa ciągi spektralne.** Jak w przypadku dowolnego kompleksu, kompleks de Rhama posiada rosnącą *filtrację kanoniczną*

$$\tau_{\leq p} \Omega^\bullet_{X/S} = \left[\mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/S} \to \ldots \to \Omega^{p-1}_{X/S} \to \mathcal{Z}^p \Omega^\bullet_{X/S} \to 0 \to \cdots\right]$$

gdzie $\mathcal{Z}^p \Omega^\bullet_{X/S} = \ker(d\colon \Omega^p_{X/S} \to \Omega^{p+1}_{X/S})$, oraz malejącą *filtrację przez naiwne obcięcia* (*filtration bête*)

$$\Omega^{\bullet \geq p}_{X/S} = \left[0 \to \cdots \to 0 \to \Omega^p_{X/S} \to \Omega^{p+1}_{X/S} \to \cdots\right].$$

Indukują one dwa ciągi spektralne zbiegające do kohomologii de Rhama, które dla uproszczenia notacji zaprezentujemy dla S afinicznego. Odpowiednio, są to *sprzężony ciąg spektralny*

$$E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\Omega^\bullet_{X/S})) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/S) \tag{2.3}$$

gdzie $\mathcal{H}^q(\Omega^\bullet_{X/S}) = (\mathcal{Z}^q\Omega^\bullet_{X/S})/d\Omega^{q-1}_{X/S}$ jest q-tym snopem kohomologii kompleksu de Rhama; oraz *ciąg spektralny Hodge'a–de Rhama*

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega^p_{X/S}) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(X/S). \tag{2.4}$$

Grupy $H^q(X, \Omega^p_{X/S})$ nazywamy *grupami kohomologii Hodge'a X/S*.

Dwa ciągi spektralne (2.3) oraz (2.4) indukują dwie filtracje na kohomologiach de Rhama, rosnącą *filtrację sprzężoną*

$$\mathrm{Fil}_i H^n_{\mathrm{dR}}(X/S) = \mathrm{im}(H^n(X, \tau_{\leq i}\Omega^\bullet_{X/S}) \to H^n(X, \Omega^\bullet_{X/S}))$$

oraz malejącą *filtrację Hodge'a*

$$\mathrm{Fil}^i H^n_{\mathrm{dR}}(X/S) = \mathrm{im}(H^n(X, \Omega^{\bullet \geq i}_{X/S}) \to H^n(X, \Omega^\bullet_{X/S})).$$

2.2.3. **Sprzężony ciąg spektralny w charakterystyce p.** Snopy kohomologii $\mathcal{H}^q(\Omega^\bullet_{X/S})$ występujące w sprzężonym ciągu spektralnym są trudne do opisania w ogólności. Natomiast w szczególnym przypadku gdy S jest $\mathbf{F}_p$-schematem mają one zaskakującą postać dzięki tzw. *izomorfizmowi Cartiera*. Zanim go sformułujemy zauważmy, że ze wzoru

$$d(F_X^*(x)) = df^p = pf^{p-1}df = 0$$

wynika, że różniczki w kompleksie de Rhama $\Omega^\bullet_{X/S}$ są $\mathcal{O}_{X'}$-liniowe, gdzie X' jest cofnięciem $X \to S$ wzdłuż F_S jak w §2.1. Identyfikujemy tutaj $\Omega^\bullet_{X/S}$ z jego pchnięciem $F_{X/S,*}\Omega^\bullet_{X/S}$ (co możemy zrobić gdyż $F_{X/S}$ jest homeomorfizmem). Zatem kompleks $F_{X/S,*}\Omega^\bullet_{X/S}$ jest kompleksem w kategorii snopów koherentnych na X', w szczególności $\mathcal{H}^i(F_{X/S,*}\Omega^\bullet_{X/S})$ jest snopem koherentnym na X' dla $i \geq 0$.

Twierdzenie 2.1 (Cartier, [Kat70, Theorem 7.2])**.** *Istnieje dokładnie jeden izomorfizm koherentnych $\mathcal{O}_{X'}$-algebr z gradacją*

$$C^{-1} \colon \bigoplus_{i \geq 0} \Omega^i_{X'/S} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{H}^i(F_{X/S,*}\Omega^\bullet_{X/S})$$

taki, że dla dowolnego lokalnego cięcia $f \in \mathcal{O}_X$ zachodzi wzór

$$C^{-1}(dW^*_{X/S}(f)) \quad = \quad \textit{klasa } f^{p-1}df \textit{ w } \mathcal{H}^1(F_{X/S,*}\Omega^\bullet_{X/S}).$$

W związku z powyższym, sprzężony ciąg spektralny (2.3) przyjmuje postać

$$E_2^{ij} = H^i(X', \Omega^j_{X'/S}) \quad \Rightarrow \quad H^{i+j}_{\mathrm{dR}}(X/S) \tag{2.5}$$

Wyjaśnia to określenie „sprzężony" — ignorując zamianę X' na X, druga strona ciągu sprzężonego wygląda jak transpozycja pierwszej strony ciągu Hodge'a–de Rhama, co przypomina zależność znaną z teorii Hodge'a

$$H^j(X,\Omega^i_X) = \overline{H^i(X,\Omega^j_X)}$$

gdzie X jest rozmaitością Kählera a sprzężenie jest brane wewnątrz

$$H^n(X,\mathbf{R})\otimes\mathbf{C} = \bigoplus_{i+j=n} H^i(X,\Omega^j_X). \tag{2.6}$$

2.2.4. **Degeneracja ciągów spektralnych.** Z istnienia *rozkładu Hodge'a* (2.6) można również wywnioskować, że jeżeli S jest $\mathbf{Q}$-schematem, wówczas ciąg spektralny Hodge'a–de Rhama (2.4) się degeneruje (na pierwszej stronie), czyli wszystkie jego różniczki, poczynając od pierwszej strony, są zerowe. Nie jest to zawsze prawdą w charakterystyce $p>0$, i szukanie kryteriów na degenerację ciagu Hodge'a–de Rhama jest ważnym problemem w geometrii algebraicznej.

Zależność pomiędzy dwoma ciągami spektralnymi w charakterystyce p ma następujące zastosowanie: jeżeli X jest schematem gładkim *właściwym* nad $S=\mathrm{Spec}(k)$, wówczas ciąg (2.4) się degeneruje (na stronie pierwszej) wtedy i tylko wtedy, gdy degeneruje się ciąg (2.5)=(2.3) (na stronie drugiej). Istotnie, oba warunki są równoważne tej samej równości

$$\sum_{n\geq 0}\dim H^n_{\mathrm{dR}}(X/S) = \sum_{n\geq 0}\sum_{i+j=n}\dim H^i(X,\Omega^j_{X/k}).$$

Jest to istotne ponieważ degeneracja sprzężonego ciągu spektralnego okazuje się być łatwiejsza do sprawdzenia. Jest to szczególnie widoczne w przypadku wyników Deligne'a i Illusiego opisanych w podrozdziale §2.6.

2.3. Kohomologie krystaliczne

Niech X będzie gładkim i właściwym schematem nad ciałem doskonałym k charakterystyki $p>0$ i niech $W=W(k)$. Wówczas Berthelot [Ber74, BO78] skonstruował *grupy kohomologii krystalicznych*

$$H^n_{\mathrm{cris}}(X/W), \quad n\geq 0$$

Są one grupami kohomologii funktorialnego *kompleksu krystalicznego* $R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W)$, obiektu kategorii pochodnej W.

Kohomologie krystaliczne mają następujące własności:

- $H^n_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest skończenie generowanym modułem nad W, zerowym dla $n>2\dim X$,
- Istnieje kanoniczny izomorfizm w kategorii pochodnej

  $$R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W)\otimes^{\mathbf{L}}_W k \simeq R\Gamma_{\mathrm{dR}}(X/k) := R\Gamma(X,\Omega^\bullet_{X/k}).$$

  Biorąc kohomologie, dostajemy krótkie ciągi dokładne

  $$0\to \mathrm{Tor}^W_1(H^{n+1}_{\mathrm{cris}}(X/W),k)\to H^n_{\mathrm{dR}}(X/k)\to H^n_{\mathrm{cris}}(X/W)\otimes_W k\to 0.$$

W szczególności, jeżeli $H^{n+1}_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest beztorsyjnym W-modułem, wówczas

$$H^n_{\mathrm{cris}}(X/W) \otimes_W k \simeq H^n_{\mathrm{dR}}(X/k).$$

- Jeżeli $\widetilde{X}$ jest podniesieniem X nad $W_n(k)$, wówczas istnieje kanoniczny izomorfizm w kategorii pochodnej
$$R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W) \otimes^{\mathbf{L}}_W W_n(k) \simeq R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}/W_n(k)).$$
W szczególności, dowolne dwa podniesienia $\widetilde{X}_0$, $\widetilde{X}_1$ nad $W_n(k)$ mają kanonicznie izomorficzne kohomologie de Rhama:
$$R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_0/W_n(k)) \simeq R\Gamma_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_1/W_n(k)).$$

- Ponieważ kompleks $R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest funktorialny, jest on wyposażone w morfizm Frobeniusa, zwany *Frobeniusem krystalicznym*
$$\varphi\colon F^*R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W) \to R\Gamma_{\mathrm{cris}}(X/W)$$
gdzie $F = W(F_k)\colon W \to W$ jest Frobeniusem na wektorach Witta. Indukowane odwzorowanie na kohomologiach
$$\varphi\colon F^*H^n_{\mathrm{cris}}(X/W) \to H^n_{\mathrm{cris}}(X/W)$$
ma torsyjne jądro i kojądro.

- $H^*_{\mathrm{cris}}(X/W) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest algebrą z gradacją, a morfizm φ jest homomorfizmem algebr.

2.4. F-kryształy

Niech k będzie ciałem doskonałym charakterystyki $p > 0$. Oznaczmy przez $W = W(k)$ pierścień wektorów Witta ciała k, i przez $F\colon W \to W$ kanoniczne (jedyne) podniesienie Frobeniusa. Dla dowolnego W-modułu M, oznaczamy przez F^*M iloczyn tensorowy $W \otimes_W M$ gdzie niejawne odwzorowanie $W \to W$ to F. Zatem zadanie W-liniowego morfizmu

$$\varphi\colon F^*M \longrightarrow N$$

jest równoważne zadaniu F-liniowego morfizmu

$$\varphi^{\mathrm{ad}}\colon M \longrightarrow N,$$

czyli addytywnego odzworowania spełniającego $\varphi^{\mathrm{ad}}(xm) = F(x)\varphi^{\mathrm{ad}}(m)$ dla $x \in W$ i $m \in M$. Morfizm φ^{ad} jest szczególnie przydatny jeżeli $M = N$, ponieważ wtedy możemy go iterować.

Definicja 2.2. Przez *F-kryształ nad k* rozumiemy wolny W-moduł skończonej rangi H wyposażony w injektywne odwzorowanie W-modułów

$$\varphi\colon F^*H \longrightarrow H.$$

2.4.1. **Filtracja Hodge'a i filtracja sprzężona.** Dla F-kryształu H oznaczamy przez H_0 jego *redukcję modulo p*, czyli przestrzeń liniową $H \otimes_W k$ wraz z Frobenius-liniowym odwzorowaniem indukowanym przez φ. Struktura F-kryształu na H indukuje dwie filtracje na H_0:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^i H_0 &= \{x : \exists y \in H \text{ podnoszący } x \text{ t.że } \varphi^{\mathrm{ad}}(y) \in p^i H\}, && \text{(filtracja Hodge'a)} \\ \mathrm{Fil}_i H_0 &= \{x : \exists y \in H \text{ podnoszący } x \text{ t.że } p^i y \in \varphi(F^* H)\} && \text{(filtracja sprzężona).} \end{aligned}$$

Ilorazy tych filtracji oznaczamy przez

$$\mathrm{gr}^i H_0 = \frac{\mathrm{Fil}^i H_0}{\mathrm{Fil}^{i+1} H_0}, \quad \mathrm{gr}_i H_0 = \frac{\mathrm{Fil}_i H_0}{\mathrm{Fil}_{i-1} H_0}.$$

Odwzorowanie φ indukuje izomorfizmy

$$\varphi_i = p^{-i}\varphi \colon F^*(\mathrm{gr}^i H_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_i H_0. \tag{2.7}$$

Wymiary ilorazów filtracji Hodge'a i sprzężonej nazywamy *liczbami Hodge'a* F-kryształu H:

$$h^i = \dim_k \mathrm{gr}^i H_0 = \dim_k \mathrm{gr}_i H_0.$$

Równoważnie, liczby Hodge'a H można odczytać patrząc na kojądro φ:

$$H/\mathrm{im}(\varphi) \simeq \bigoplus_{i\geq 1} (W/p^i W)^{h^i}.$$

2.4.2. **Wielokąt Hodge'a.** *Wielokątem Hodge'a* F-kryształu H nazywamy łamaną w $\mathbf{R}^2$ będącą wykresem jedynej funkcji kawałkami liniowej

$$h\colon [0, \mathrm{rk} H] \longrightarrow \mathbf{R}$$

spełniającej $h(0) = 0$ i liniowej na przedziale $[h^0 + \ldots + h^{i-1}, h^0 + \ldots + h^i]$ z nachyleniem równym i dla każdego $0 \leq i \leq r$.

2.4.3. **Nachylenia i wielokąt Newtona.** Jeżeli ciało k jest algebraicznie domknięte, wówczas na mocy twierdzenia Dieudonné–Manina kategoria F-kryształów nad k jest półprosta. Jej obiekty proste są opisane następująco: dla nieujemnej liczby wymiernej $\lambda = a/b$ z $a \geq 0$, $b > 0$, $(a,b) = 1$ niech

$$E(\lambda) = \mathbf{Z}_p[X]/(X^b - p^a) \otimes_{\mathbf{Z}_p} W, \qquad \varphi = (\text{mnożenie przez } X) \otimes F.$$

Mówiąc inaczej, $E(\lambda)$ ma bazę $(e_0, \ldots, e_{b-1})$ na której φ^{ad} działa jak poniżej:

$$\varphi^{\mathrm{ad}}(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{jeśli } i < b-1, \\ p^a e_0 & \text{jeśli } i = b-1. \end{cases}$$

Niech H będzie F-kryształem nad k, i niech $\overline{k}$ będzie algebraicznym domknięciem k. Wówczas na mocy powyższego akapitu mamy rozkład

$$H \otimes_W W(\overline{k}) \simeq E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r), \qquad \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_r$$

dla pewnego jednoznacznie wyznaczonego niemalejącego ciągu nieujemnych liczb wymiernych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Liczby te nazywamy *nachyleniami Newtona* F-kryształu H.

Wielokątem Newtona F-kryształu H nazywamy łamaną w $\mathbf{R}^2$ będącą wykresem jedynej funkcji kawałkami liniowej

$$\lambda \colon [0, \operatorname{rk} H] \longrightarrow \mathbf{R}$$

spełniającej $\lambda(0) = 0$ i liniowej z nachyleniem równym λ_i na każdym przedziale $[i-1, i]$ dla $1 \leq i \leq \operatorname{rk} H$.

Definicja 2.3. F-kryształ H nad k nazywamy *jednostkowym* (ang. *unit root*) jeżeli wszystkie jego nachylenia Newtona są równe zeru.

Równoważnie, H jest jedostkowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza $e_1, \ldots, e_r$ modułu H dla której $\varphi^{\mathrm{ad}}(e_i) = e_i$. Używamy następującej notacji (tzw. *Tate twist*): dla F-kryształu (H, φ) i liczby całkowitej $i \geq 0$, przez $H(-i)$ oznaczamy F-kryształ $(H, p^i \varphi)$.

2.4.4. **Twierdzenie Mazura.** Twierdzenie Mazura [Maz73] pokazuje fundamentalną zależność pomiędzy wielokątami Newtona i Hodge'a.

Twierdzenie 2.4 ([Kat79, Theorem 1.4.1])**.** *Niech H będzie F-kryształem nad k. Wówczas wielokąt Newtona leży powyżej wielokąta Hodge'a, tj.*

$$\lambda(x) \geq h(x) \qquad \text{dla } x \in [0, \operatorname{rk} H].$$

Ponadto, wielokąty te mają wspólne końce, tj.

$$\lambda(0) = h(0) = 0, \qquad \lambda(\operatorname{rk} H) = h(\operatorname{rk} H) = \operatorname{length}(H / \operatorname{im}(\varphi)).$$

2.4.5. **Zwyczajność.** Najprostsze do badania, oraz istotne z punktu widzenia teorii Serre'a–Tate'a omówionej w §4, są F-kryształy *zwyczajne*.

Definicja 2.5. F-kryształ H nad k nazywamy *zwyczajnym* jeżeli jego wielokąty Newtona i Hodge'a są sobie równe:

$$\lambda(x) = h(x) \qquad \text{dla } x \in [0, \operatorname{rk} H].$$

Istnieje wiele równoważnych charakteryzacji zwyczajności. Wymieńmy kilka z nich:

Stwierdzenie 2.6. *Niech H będzie F-kryształem nad k. Następujące warunki są równoważne:*

(a) H jest zwyczajny w myśl Definicji 2.5;

(b) wszystkie nachylenia Newtona $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ są liczbami całkowitymi;

(c) istnieją F-kryształy jednostkowe U_i ($i \geq 0$) oraz rozkład

$$H \simeq \bigoplus_{i \geq 0} U_i(-i).$$

(d) filtracje $\operatorname{Fil}^\bullet H_0$ *oraz* $\operatorname{Fil}_\bullet H_0$ *są przeciwstawne, tj.*

$$H_0 = (\operatorname{Fil}_i H_0) \oplus (\operatorname{Fil}^{i+1} H_0) \qquad \text{dla } i \geq 0.$$

2.4.6. **Kohomologie krystaliczne jako F-kryształy.** Podobnie do pojęcia struktury Hodge'a, czyli abstrakcyjnego obiektu z algebry liniowej opisującego strukturę kohomologii rozmaitości Kählera, pojęcie F-kryształu ma na celu sformalizowanie struktury na kohomologiach krystalicznych. Do tej zależności potrzebne są jednak pewne techniczne założenia:

Twierdzenie 2.7 ([BO78, §8]). *Niech X będzie gładkim i właściwym schematem nad ciałem doskonałym k charakterystyki $p > 0$. Załóżmy, że zachodzą następujące warunki:*

1. *grupy kohomologii krystalicznych $H^n_{\mathrm{cris}}(X/W)$ są beztorsyjnymi W-modułami dla $n \geq 0$,*
2. *ciąg spektralny Hodge'a–de Rhama* (2.4) *się degeneruje.*

Wówczas $H = H^n_{\mathrm{cris}}(X/W)$ wyposażone w krystalicznego Frobeniusa φ jest F-kryształem. Ponadto, filtracje sprzężona $\mathrm{Fil}_i H_0$ oraz Hodge'a $\mathrm{Fil}^i H_0$ zdefiniowane powyżej są równe filtracjom sprzężonej $\mathrm{Fil}_i H^n_{\mathrm{dR}}(X/k)$ oraz Hodge'a $\mathrm{Fil}^i H^n_{\mathrm{dR}}(X/k)$ zdefiniowanym w §2.2.

Wspomniany związek pomiędzy filtracją Hodge'a X/k oraz filtracją Hodge'a F-kryształu $H^*_{\mathrm{cris}}(X/W)$ nosi nazwę *twierdzenia Mazura–Ogusa*.

2.5. Teoria deformacji

Omówimy teraz podstawowe pojęcia z teorii deformacji, takich jak klasy przeszkód deformacyjnych, skupiając się na deformacjach schematów gładkich. Szczegóły można znaleźć w standardowych źródłach, np. [Ill05, Ill71].

2.5.1. **Funktory pierścieni artinowskich.** Niech k będzie ciałem i niech W będzie noetherowskim lokalnym pierścieniem zupełnym z ciałem rezidualnym k. W zastosowaniach istotne będą dwa przypadki: $W = k$ oraz $W = W(k)$ gdy k jest ciałem doskonałym charakterystyki dodatniej. Przez $\mathbf{Art}^k_W$ oznaczamy kategorię artinowskich W-algebr lokalnych z ciałem rezidualnym k. Zatem k jest obiektem końcowym kategorii $\mathbf{Art}^k_W$. W teorii deformacji badamy funktory

$$F\colon\ \mathbf{Art}^k_W \longrightarrow \mathbf{Set} \tag{2.8}$$

spełniające warunek $F(k) = \{\star\}$, tj. $F(k)$ jest zbiorem jednoelementowym. *Przestrzeń styczna* funktora F to $F(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$.

Powiemy, że lokalna W-algebra R jest *formalnie skończonego typu* jeżeli istnieje surjekcja

$$W[\![x_1,\ldots,x_r]\!] \longrightarrow R$$

dla pewnego $r \geq 0$. Wówczas dla dowolnego $n \geq 0$, iloraz $R/\mathfrak{m}_R^{n+1}$ jest obiektem $\mathbf{Art}^k_W$ oraz

$$R \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n R/\mathfrak{m}_R^{n+1}.$$

Algebra R definiuje funktor (*formalne spektrum*)

$$\mathrm{Spf}(R) = \mathrm{Hom}(R,-)\colon\ \mathbf{Art}^k_W \longrightarrow \mathbf{Set}, \qquad \mathrm{Spf}(R)(A) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{Art}^k_W}(R/\mathfrak{m}_R^{n+1}, A).$$

Funktor (2.8) nazwiemy *pro-reprezentowalnym* jeżeli istnieje izomorfizm funktorów

$$F \simeq \mathrm{Spf}(R)$$

dla pewnej lokalnej W-algebry R formalnie skończonego typu. Przestrzeń styczna takiego funktora jest izomorficzna z

$$\mathrm{Hom}(R, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \quad \simeq \quad \mathrm{Der}_W(R,k) \quad \simeq \quad \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2, k),$$

co tłumaczy terminologię „przestrzeń styczna”. Kryteria Schlessingera [Sch68] dają warunki konieczne i dostateczne dla pro-reprezentowalności.

2.5.2. **Deformacje schematów.** Niech X_0 będzie schematem nad k i niech A będzie obiektem kategorii $\mathbf{Art}_W^k$. Przez *deformację* X_0 nad A rozumiemy płaski schemat X nad A wraz z izomorfizmem $\iota\colon X_0 \xrightarrow{\sim} X \otimes_A k$. Deformacje X_0 nad A tworzą kategorię $\underline{\mathbf{Def}}_{X_0/W}(A)$, w której morfizmy $(X,\iota) \to (X,\iota')$ to morfizmy $f\colon X \to X'$ nad $\mathrm{Spec}(A)$ takie, że trójkąt

$$\begin{tikzcd} & X \otimes_A k \arrow[dd, "f"] \\ X_0 \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \\ & X' \otimes_A k \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Morfizm f jest wtedy automatycznie izomorfizmem; kategoria $\underline{\mathbf{Def}}_{X_0/W}(A)$ jest zatem grupoidem. Morfizm $A \to A'$ w kategorii $\mathbf{Art}_W^k$ indukuje funktor

$$\underline{\mathbf{Def}}_{X_0/W}(A) \longrightarrow \underline{\mathbf{Def}}_{X_0/W}(A'), \qquad X \mapsto X \otimes_A A'.$$

Oznaczmy przez $\mathrm{Def}_{X_0/W}(A)$ zbiór klas izomorfizmu obiektów kategorii $\underline{\mathbf{Def}}_{X_0/W}(A)$. Dostajemy w ten sposób funktor

$$\mathrm{Def}_{X_0/W}\colon\ \mathbf{Art}_W^k \longrightarrow \mathbf{Set}$$

który nazywamy *funktorem deformacji* X_0 nad W. Funktor ten nie zawsze jest pro-reprezentowalny. Wiadomo, że jest on pro-reprezentowalny w wielu istotnych z naszego punktu widzenia sytuacjach.

2.5.3. **Deformacje schematów gładkich.** Niech X_0 będzie schematem gładkim nad k i niech $B \to A$ będzie surjekcją w kategorii $\mathbf{Art}_W^k$ której jądro I ma kwadrat zero:

$$A \simeq B/I, \quad I^2 = 0.$$

W szczególności ideał I możemy traktować jako A-moduł. Niech X będzie deformacją X_0 nad A. Szukamy deformacji $\widetilde{X}$ nad B takiej, że $\widetilde{X} \otimes_A B \simeq X$ (nazwijmy ją krótko deformacją X nad B). Informacji na ten temat dostarcza teoria przeszkód deformacyjnych.

Rozważmy stóg $\mathcal{D}$ na $|X| = |X_0|$ przypisujący otwartemu podzbiorowi $U \subseteq X$ kategorię wszystkich deformacji $\widetilde{U}$ nad B. Jeżeli $\widetilde{U}$ jest obiektem $\mathcal{D}$ a $f\colon \widetilde{U} \to \widetilde{U}$ jest automorfizmem $\widetilde{U}$, wówczas $f - \mathrm{id}\colon \mathcal{O}_{\widetilde{U}} \to \mathcal{O}_{\widetilde{U}}$ znika modulo I, zatem faktoryzuje się przez morfizm snopów na U

$$\delta\colon\ \mathcal{O}_U \longrightarrow \mathcal{O}_U \otimes I.$$

Morfizm δ jest A-liniowym różniczkowaniem. Konstrukcja ta zadaje izomorfizm snopów

$$\underline{\mathrm{Aut}}(\widetilde{U}) \xrightarrow{\sim} \underline{Der}_A(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X \otimes I)|_U$$

Jednocześnie, każdy punkt X ma otoczenie otwarte U wyposażone w etalny morfizm $U \to \mathbf{A}^n_A$. Ponieważ morfizmy etalne deformują się jednoznacznie wzdłuż każdego nilpotentnego pogrubienia przeciwdziedziny, dla U jak wyżej będzie istniała deformacja $\widetilde{U}$, i każde dwie takie deformacje będą izomorficzne. Zatem snop groupoidów $\mathcal{D}$ jest stogiem który ma obiekty lokalnie, w którym każde dwa obiekty są lokalnie izomorficzne, i w którym automorfizmy dowolnego obiektu są utożsamione ze snopem różniczkowań $T_{X/A} \otimes I = \underline{Der}_A(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X \otimes I)$. Innymi słowy, $\mathcal{D}$ to $T_{X/A} \otimes I$-*gerbe* na X. Z ogólnej teorii gerbów [Gir71] wynika wtedy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.8. *W powyższej sytuacji, istnieje klasa przeszkody deformacyjnej*

$$\mathrm{obs}(X/A/B) = \mathrm{cl}(\mathcal{D}) \quad \in \quad H^2(X, T_{X/A} \otimes I)$$

która znika wtedy i tylko wtedy, gdy klasa izomorfizmu $[X]$ jest w obrazie

$$\mathrm{Def}_{X/W}(B) \longrightarrow \mathrm{Def}_{X/W}(A).$$

W tym przypadku przeciwobraz $[X]$ w $\mathrm{Def}_{X/W}(B)$ jest w naturalny sposób torsorem ze względu na grupę kohomologii $H^1(X, T_{X/A} \otimes I)$. Jeżeli $\widetilde{X}$ jest deformacją X nad B, wówczas grupa automorfizmów $\widetilde{X}$ nad B indukujących identyczność na X jest naturalnie izomorficzna z grupą $H^0(X, T_{X/A} \otimes I)$.

2.5.4. **Naturalność przeszkód deformacyjnych.** Niech $B \to B/I = A$ będzie jak wyżej i niech $f\colon Y \to X$ będzie morfizmem gładkich schematów nad A. Wówczas klasy przeszkód deformacyjnych

$$\mathrm{obs}(X/A/B) \in H^2(X, T_{X/A} \otimes I) \quad \text{oraz} \quad \mathrm{obs}(Y/A/B) \in H^2(Y, T_{Y/A} \otimes I)$$

są kompatybilne w następującym sensie. Ponieważ $\Omega^1_{X/A}$ oraz $\Omega^1_{Y/A}$ są lokalnie wolne, mamy izomorfizm

$$H^2(X, T_{X/A} \otimes I) \simeq \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X/A}, \mathcal{O}_X \otimes I) = \mathrm{Hom}_{D(X)}(\Omega^1_{X/A}, \mathcal{O}_X \otimes I[2]).$$

i podobnie dla Y. Możemy zatem klasy przeszkód zinterpretować jako morfizmy w odpowiednich kategoriach pochodnych

$$\mathrm{obs}(X/A/B)\colon \Omega^1_{X/A} \to \mathcal{O}_X \otimes I[2] \quad \text{oraz} \quad \mathrm{obs}(Y/A/B)\colon \Omega^1_{Y/A} \to \mathcal{O}_Y \otimes I[2].$$

Lemat 2.9 ([Zda18, Appendix A])**.** *Dla dowolnego morfizmu $f\colon Y \to X$ gładkich schematów nad A następujący kwadrat w kategorii pochodnej X jest przemienny*

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{X/A} \arrow[r, "\mathrm{obs}(X/A/B)"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X \otimes I[2] \arrow[d] \\
Rf_*\Omega^1_{Y/A} \arrow[r, "Rf_*\,\mathrm{obs}(Y/A/B)"'] & (Rf_*\mathcal{O}_Y) \otimes I[2].
\end{tikzcd}$$

2.5.5. **Technika „spychania" deformacji.** Następujący lemat, stosowany w pracach [Hab1] oraz [Hab3], pozwala mając zadane morfizm o spójnych wymiernych włóknach $f\colon Y\to X$ (np. rozdmuchanie) oraz deformację schematu Y „zepchnąć" ją do deformacji schematu X, czyli skonstruować zgodną z nią deformację X oraz morfizmu f. Znamy go z prac [CvS09] oraz [LS14], zaś najwcześniejsze znane nam użycie tego tricku jest w [BW74, Proposition 2.3].

Lemat 2.10 ([LS14, Proposition 2.1])**.** *Niech $\pi\colon Y\to X$ będzie morfizmem k-schematów takim, że*

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_Y \quad \textit{oraz} \quad R^1\pi_*\mathcal{O}_Y = 0.$$

Wówczas istnieje naturalna transformacja pomiędzy funktorami deformacji

$$\pi_*\colon \operatorname{Def}_{Y/W} \longrightarrow \operatorname{Def}_{X/W},$$

przypisująca deformacji $\widetilde{Y}$ nad A podniesienie $\widetilde{X}=\pi_*(\widetilde{Y})$ wraz z morfizmem $\tilde{\pi}\colon\widetilde{Y}\to\widetilde{X}$ nad A podnoszącym π. Dokładniej, snop strukturalny $\widetilde{X}$ jest zdefiniowany wzorem

$$\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \pi_*\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}.$$

W rezultacie, para $(\widetilde{X},\tilde{\pi})$ jest wyznaczona z dokładnością do jedynego izomorfizmu indukującego identyczność na X i $\widetilde{Y}$.

2.6. Deligne–Illusie

Wyniki fundamentalnej pracy [DI87] łączą teorię deformacji w mieszanej charakterystyce, dokładniej podniesienia modulo p^2, z rozkładem kompleksu de Rhama w kategorii pochodnej oraz degeneracją ciągów spektralnych opisanych w §2.2. Jednym z głównych jej osiągnięć jest algebraiczny dowód znikania Kodairy–Akizukiego–Nakano.

Niech X będzie gładkim i separowalnym schematem nad ciałem doskonałym k charakterystyki $p>0$. Dzięki izomorfizmowi Cartiera, kompleks

$$\tau_{\leq 1}(F_{X/k,*}\Omega^\bullet_{X/k}) = \left[F_{X/k,*}\mathcal{O}_X \to F_{X/k,*}\mathcal{Z}^1\Omega^\bullet_{X/k}\right]$$

jest środkowym wyrazem trójkąta wyróżnionego w kategorii pochodnej $D(X',\mathcal{O}_{X'})$

$$\mathcal{O}_{X'} \longrightarrow \tau_{\leq 1}(F_{X/k,*}\Omega^\bullet_{X/k}) \longrightarrow \Omega^1_{X'/k}[-1] \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}[1].$$

Dostajemy zatem morfizm $\delta\colon \Omega^1_{X'/k}\to\mathcal{O}_{X'}[2]$, czyli element

$$\delta^1_{X/k} \quad \in \quad \operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X'/k},\mathcal{O}_{X'}) \simeq H^2(X',T_{X'/k}).$$

Z drugiej strony, omawiana w §2.5 klasa-przeszkoda do istnienia podniesienia X' do $W_2(k)$ to element

$$\operatorname{obs}(X'/k/W_2(k)) \in H^2(X',T_{X'/k}).$$

Twierdzenie 2.11 (Deligne–Illusie)**.** *Zachodzi równość $\delta^1_{X/k}=\operatorname{obs}(X'/k/W_2(k))$.*

W szczególności, X' podnosi się do $W_2(k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozkład na sumę prostą w kategorii pochodnej X'

$$\tau_{\leq 1}(F_{X/k,*}\Omega^\bullet_{X/k}) \simeq \mathcal{O}_{X'} \oplus \Omega^1_{X'/k}[-1].$$

Rozkład ten rozszerza się wtedy do rozkładu

$$\tau_{\leq p-1}(F_{X/k,*}\Omega^\bullet_{X/k}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} \Omega^i_{X'/k}[-i].$$

Wniosek 2.12. *Jeżeli X' podnosi się do $W_2(k)$ oraz* $\dim(X) \leq p$*, wówczas sprzężony ciąg spektralny* (2.5) *się degeneruje i istnieje kanoniczny rozkład na sumę prostą (zależny od wyboru podniesienia)*

$$H^n_{\mathrm{dR}}(X/k) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(X', \Omega^j_{X'/k}).$$

Jeżeli X jest dodatkowo właściwy nad k, wówczas ciąg spektralny Hodge'a–de Rhama (2.4) *również się degeneruje.*

W pracy [AS21] (preprint niewchodzący w zakres osiągnięcia habilitacyjnego) wraz z Junecue Suh dowodzimy pewnych uogólnień wyników Deligne'a i Illusiego, opisując obcięcia $\tau_{[a,b]}(F_{X/k,*}\Omega^\bullet_{X/k})$ dla $0 \leq b-a \leq \max(p-1, 2)$.

3. Przykłady niepodnoszalnych rozmaitości [Hab1]

Ideą pierwszej z omawianych prac [Hab1] jest stosowanie techniki „spychania deformacji” do przeprowadzenia dość elementarnych konstrukcji rozmaitości w dodatniej charakterystyce niepodnoszalnych do charakterystyki zero. W pracy zaprezentowano dwie takie konstrukcje. Jakkolwiek już wcześniej znano wiele przykładów niepodnoszalnych rozmaitości, te zaprezentowane tutaj są całkiem ekonomiczne: unikają wszelkich innych patologii geometrii w dodatniej charakterystyce i są dość bliskie rozmaitościom podnoszalnym (np. są wymierne).

Definicja 3.1. Niech k będzie ciałem charakterystyki $p > 0$ i niech X będzie schematem właściwym[1] nad k. Powiemy, że X jest *podnoszalny do charakterystyki zero* jeżeli istnieje lokalna dziedzina R z ciałem rezidualnym k oraz ciałem ułamków charakterystyki zero oraz schemat $\mathcal{X}$ właściwy i płaski nad R taki, że

$$\mathcal{X} \otimes_R k \simeq X.$$

Pierwszy przykład rozmaitości (gładkiej i rzutowej) nad ciałem charakterystyki $p > 0$ która nie jest podnoszalna do charakterystyki zero podał Serre [Ser61]. W istocie, jego przykład jest silnie niepodnoszalny w myśl poniższej definicji.

[1]Jakkolwiek definicja ta ma sens dla dowolnych, niekoniecznie właściwych, schematów nad k, bez tego założenia napotykamy pewne problemy. Dla przykładu, dla dowolnego schematu $\mathcal{X}$ nad $K = \mathrm{Frac}(R)$, schemat $\mathcal{X}$ traktowany jako schemat nad R mógłby być rozumiany jako "płaskie podniesienie" pustego schematu nad k.

Definicja 3.2. Niech k będzie ciałem charakterystyki $p > 0$ i niech X będzie schematem nad k. Powiemy, że X jest *silnie niepodnoszalny*[2] jeżeli dla dowolnego pierścienia lokalnego R z ciałem rezidualnym k zachodzi następujący warunek:

jeżeli istnieje płaski schemat $\mathcal{X}$ nad R taki, że $\mathcal{X} \otimes_R k \simeq X$, to $pR = 0$.

3.1. Znane przykłady niepodnoszalnych rozmaitości

Jak wspomnieliśmy powyżej, pierwszy przykład (silnie) niepodnoszalnej rozmaitości skonstruował Serre [Ser61]. Konstrukcja ta opiera się na następującym pomyśle. Grupa PGL_{n+1} symetrii przestrzeni rzutowej nad ciałem charakterystyki $p > 0$ zawiera dużą skończoną p-grupę: grupę G ściśle górnotrójkątnych macierzy o wyrazach w $\mathbf{F}_p$, o rzędzie równym $p^{n(n+1)/2}$. W charakterystyce zero, macierze unipotentne mają nieskończony rząd, i łatwo wywnioskować, że grupa G nie może działać wiernie na $\mathbf{P}^n_K$ gdy $\mathrm{char}(K) = 0$. Żeby zamienić „niepodnoszalną pogrupę” w niepodnoszalną rozmaitość, Serre znajduje (z pomocą twierdzenia Bertiniego) gładkie zupełne przecięcie $Y \subseteq \mathbf{P}^n$ zachowywane przez G i na którym G działa wolno. Wtedy iloraz $X = Y/G$ jest szukaną rozmaitością; łatwo widać, że podnoszalność X implikuje podnoszalność Y wraz z działaniem G, i wtedy podnosi się również działanie G na $\mathbf{P}^n$.

Zaskakująca konstrukcja Vakila [Vak06], tzw. *prawo Murphy'ego dla schematu Hilberta*, oparta o twierdzenie Mniowa o uniwersalności przestrzeni reprezentacji matroidów, pokazuje że każdy typ osobliwości nad $\mathbf{Z}$ pojawia się (w pewnym precyzyjnym sensie) na jednej z szeregu przestrzeni moduli, w szczególności na przestrzeni moduli powierzchni ogólnego typu. Wynika stąd np., że dla dowolnego wybranego $m \geq 1$ istnieje sztywna powierzchnia ogólnego typu nad $\overline{\mathbf{F}}_p$ która podnosi się do $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$ ale nie do $\mathbf{Z}/p^{m+1}\mathbf{Z}$.

O wiele trudniejszym problemem jest znajdowanie niepodnoszalnych rozmaitości Calabiego–Yau, czy ogólniej rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną. Jest to ciekawe pytanie, ponieważ rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną w charakterystyce zero nie mają przeszkód deformacyjnych (twierdzenie Bogomołowa–Tiana–Todorowa). Pierwsze przykłady (w wymiarze 3) zostały podane przez Hirokado [Hir99] oraz Schröera [Sch04]. Szereg dalszych podali Cynk i van Straten [CvS09]. W [Zda21, Appendix], wraz z M. Zdanowiczem podaliśmy pierwsze przykłady niepodnoszalnych rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną w dowolnej charakterystyce (ich wymiar rośnie jednak wraz z charakterystyką). Dość prosta konstrukcja opiera się na dużo trudniejszej konstrukcji niepodnoszalnych rozmaitości Fano autorstwa Totaro [Tot19].

3.2. Rozdmuchania przestrzeni rzutowej

Niech $k = \mathbf{F}_q$ będzie ciałem skończonym o $q = p^r$ elementach, niech $m \geq 1$, i niech $X_0 = \mathbf{P}^m_k$ będzie m-wymiarową przestrzenią rzutową nad k. Definiujemy ciąg rozdmuchań

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_{m-1}$$

jak poniżej:

[2] Definicja wprowadzona na potrzeby autoreferatu.

- X_1 jest rozdmuchaniem X_0 w skończonej liczbie punktów $X_0(k)$;
- X_2 jest rozdmuchaniem X_1 w sumie (rozłącznej) przeciwobrazów właściwych wszystkich prostych łączących punkty w $X_0(k)$,
- ...
- X_n $(1 \leq n < m)$ jest rozdmuchaniem X_{n-1} w sumie (rozłącznej) przeciwobrazów właściwych wszystkich $(n-1)$-wymiarowych podprzestrzeni liniowych X_0 rozpiętych przez punkty k-wymierne.

Oznaczmy $X(m,q) = X_{m-1}$, jest to gładka i rzutowa wymierna rozmaitość nad k.

Twierdzenie 3.3 (Zob. [Hab1, Theorem 1])**.** *Dla $m \geq 3$, rozmaitość $X = X(m,q)$ jest silnie niepodnoszalna. Ma ona natomiast następujące „przyjemne” własności:*

1. *jest wymierna, a jej klasa w pierścieniu Grothendiecka rozmaitości $K_0(\mathbf{Var}_k)$ jest wielomianem od motywu Lefschetza $\mathbf{L} = [\mathbf{A}^1]$ o nieujemnych współczynnikach całkowitych,*
2. *dla liczby pierwszej $\ell \neq p$, jej pierścień całkowitych ℓ-adycznych kohomologii $H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_\ell)$ jest generowany przez cykle algebraiczne zdefiniowane nad k,*
3. *jej kohomologie krystaliczne są beztorsyjne, jej ciąg spektralny Hodge'a–de Rhama się degeneruje, jest ona zwyczajna w sensie Blocha–Kato [BK86], i jest typu Hodge'a–Witta.*

Dowód tego twierdzenia ociera się o problem rzutowej reprezentowalności matroidów.

Definicja 3.4. *Matroidem* nazywamy parę (E,I) gdzie E jest zbiorem skończonym zaś $I \subseteq 2^E$ jest rodziną podzbiorów E, zwaną *rodziną podzbiorów niezależnych*, spełniającą następujące aksjomaty:

1. $\emptyset \in I$ (podzbiór pusty jest niezależny),
2. $A \in I$, $B \subseteq A \Rightarrow B \in I$ (podzbiór zbioru niezależnego jest niezależny)
3. jeżeli $A, B \in I$ oraz $|A| > |B|$, wówczas istnieje $x \in A \setminus B$ taki, że $B \cup \{x\} \in I$ (aksjomat wymiany).

Reprezentacją liniową (odp. *reprezentacją rzutową*) matroidu (E,I) nad pierścieniem lokalnym R z ciałem rezidualnym k nazywamy funkcję

$$\rho : E \longrightarrow V \quad (\text{odp. } \rho : E \longrightarrow \mathbf{P}(V))$$

dla pewnego wolnego skończenie generowanego modułu V and R taką, że złożenie

$$E \longrightarrow V \longrightarrow V \otimes_R k \qquad (\text{odp. } E \longrightarrow \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V \otimes_R k))$$

jest injekcją, a dla dowolnego podzbioru $A \subseteq E$ zachodzi równoważność

$$A \in I \quad \Leftrightarrow \quad \text{obraz } A \text{ w } V \otimes_R k \text{ (odp. } \mathbf{P}(V \otimes_R k)) \text{ jest podzbiorem liniowo niezależnym.}$$

Jeżeli takie ρ istnieje, powiemy, że matroid (E,I) jest *reprezentowalny* (odp. *rzutowo reprezentowalny*) nad R.

Wspomniany wyżej związek można wyrazić w dwu następujących lematach:

Lemat 3.5. *Niech R będzie lokalnym pierścieniem artinowskim z ciałem rezidualnym k zawierającym $\mathbf{F}_q$. Jeżeli $X(m,q)$ podnosi się do R, to matroid $\mathbf{P}^m(\mathbf{F}_q)$ jest rzutowo reprezentowalny nad R.*

Dowód powyższego lematu wykorzystuje wariant techniki „spychania deformacji” (§2.5).

Lemat 3.6. *Niech R będzie pierścieniem lokalnym, niech p będzie liczbą pierwszą, i niech $m > 1$. Jeżeli matroid $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_p)$ jest rzutowo reprezentowalny nad R, to wówczas $pR = 0$.*

W rzeczywistości elementarny dowód powyższego lematu pokazuje pewien podmatroid matroidu $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_p)$ mający $2p+3$ elementów (oznaczany M_p w [Gor88]) o tej samej własności. Oznacza to, że można skontruować bardziej ekonomiczny ale mniej symetryczny wariant konstrukcji rozmaitości $X(m,q)$.

W [Lan16, Proposition 8.4] udowodnione jest, że para (X,D), gdzie $X = X(2,p)$ jest rozdmuchaniem $\mathbf{P}^2$ w $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_p)$ a dywizor D jest sumą transformat co najmniej $4p-3$ prostych zdefiniowanych nad $\mathbf{F}_p$, nie podnosi się modulo p^2. Przykłady zbliżone do $X(2,q)$ (używające rozgałęzionych nakryć zamiast rozdmuchań) znajdują się w [BHH87, §3.5J] oraz [Eas08].

Uwaga 3.7. Rozmaitości $X(m,q)$ pojawiły się wcześniej w kontekście modeli formalnych górnej półprzestrzeni Drinfelda $\widehat{\Omega}^m_K$ [Mus78, Ito05, Kur80, RTW13]. Jest to analityczna rozmaitość niearchimedesowa nad skończonym rozszerzeniem K ciała $\mathbf{Q}_p$ z ciałem rezidualnym $k = \mathbf{F}_q$ powstała poprzez usunięcie z (uanalitycznienia) $\mathbf{P}^m_K$ wszystkich hiperpłaszczyzn określonych nad K. Posiada ona naturalne działanie grupy $\mathrm{PGL}_{m+1}(K)$, istotne z punktu widzenia lokalnej odpowiedności Langlandsa nad K. Posiada ona naturalny semistabilny model formalny $\mathcal{X}(m,K)$ nad $\mathcal{O}_K$, a wszystkie składowe nierozkładalne włókna szczególnego $\mathcal{X}(m,K)_k$ są izomorficzne z $X(m,q)$. Ponadto, wszystkie niepuste przecięcia owych składowych są izomorficzne z $X(i,q)$ dla $i \leq m$.

Uwaga 3.8. Dla $m = 2$ Twierdzenie 3.3 nie zachodzi. Istotnie, dowolna gładka powierzchnia wymierna jest podnoszalna. Ogólniej, korzystając z techniki „spychania deformacji”, Liedtke i Satriano pokazali w [LS14], że podnoszalność jest niezmiennikiem biwymiernym gładkich powierzchni.

3.3. Rozdmuchanie wykresu Frobeniusa

Następny przykład z pracy [Hab1] jest oparty na fakcie, zbadanym o wiele głębiej w pracy [Hab3], że jakkolwiek wiele rozmaitości w charakterystyce p podnosi się do charakterystyki zero, to prawie nigdy nie udaje się podnieść rozmaitości *wraz z jej morfizmem Frobeniusa*.

Żeby powiązać podnoszalność rozmaitości z podnoszalnością morfizmu Frobeniusa, stosujemy następującą konstrukcję. Niech Y będzie rozmaitością nad $\mathbf{F}_p$ która nie podnosi się wraz z Frobeniusem (czy to do charakterystyki zero czy do $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$). Rozważmy wtedy rozdmuchanie

$$X = \mathrm{Bl}_{\Gamma_F}(Y \times Y)$$

produktu $Y \times Y$ wzdłuż wykresu morfizmu Frobeniusa $F_Y \colon Y \to Y$. Spodziewamy się, że rozmaitość X „koduje” w pewnym sensie parę (Y, F_Y), i że podnoszalność X może implikować podnoszalność Y wraz z Frobeniusem. To nie może być prawda w ogólności, np. gdy Y jest gładką krzywą genusu > 1 (wówczas $X = Y \times Y$ bo rozdmuchujemy dywizor). Trudność w dowodzie prezentowanego poniżej wyniku polega na znalezieniu kryteriów, które Y ma spełniać, żeby powyższa implikacja zachodziła.

Twierdzenie 3.9. *Niech Y będzie gładką rzutową rozmaitością nad $\mathbf{F}_p$. Załóżmy, że $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ oraz $H^1(Y, T_Y) = 0$. Niech R będzie artinowskim pierścieniem lokalnym z ciałem rezidualnym $\mathbf{F}_p$. Jeżeli $X = \mathrm{Bl}_{\Gamma_F}(Y \times Y)$ podnosi się do R, wówczas Y podnosi się do R wraz z Frobeniusem.*

Dowód Twierdzenia 3.9 opiera się na technice „spychania deformacji” omówionej w §2.5. Mianowicie, jeżeli $\dim Y > 1$, wówczas deformacja X indukuje deformację pary schematów $(Y \times Y, \Gamma_{F_Y})$. Wykorzystując addytywność klasy Kodairy–Spencera pokazujemy, że założenie $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ implikuje, że naturalny morfizm funktorów

$$\mathrm{Def}_{Y/W} \times \mathrm{Def}_{Y/W} \longrightarrow \mathrm{Def}_{Y \times Y/W}$$

jest gładki [Hab1, Proposition 2.2]. Zatem podnoszalność pary $(Y \times Y, \Gamma_{F_Y})$ implikuje istnienie podniesienia

$$\widetilde{F}_Y \colon \widetilde{Y}_0 \longrightarrow \widetilde{Y}_1$$

gdzie $\widetilde{Y}_i$ $(i = 0, 1)$ to dwa niezależne podniesienia Y. W końcu, założenie $H^1(Y, T_Y) = 0$ implikuje $\widetilde{Y}_0 \simeq \widetilde{Y}_1$, zatem podnoszalność X implikuje podnoszalność Y wraz z F_Y.

Twierdzenie 3.9 najprościej zastosować do przestrzeni jednorodnych. Z pracy [Hab3] (zob. §5) wiadomo, że przestrzeń jednorodna $Y = G/P$ nad $\mathbf{F}_p$ podnosi się wraz z Frobeniusem do $W_2(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ tylko wtedy, gdy jest produktem przestrzeni rzutowych. Podobnie z pracy [PS89] wynika analogiczne stwierdzenie dla podnoszalności Y do charakterystyki zero. Najprostsze przykłady to trójwymiarowa kwadryka $Q \subseteq \mathbf{P}^4$ oraz rozmaitość flag SL_3/B (dywizor stopnia $(1,1)$ w $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$), oba wymiaru 3.

Wniosek 3.10. *Niech Y będzie przestrzenią jednorodną nad $\mathbf{F}_p$, która nie jest izomorficzna z produktem przestrzeni rzutowych. Wówczas rozmaitość $X = \mathrm{Bl}_{\Gamma_F}(Y \times Y)$ nie podnosi się ani do $W_2(k)$ ani do charakterystyki zero. Jednocześnie X ma „pożądane własności” wymienione w Twierdzeniu 3.3.*

Rozmaitość X jak w powyższym twierdzeniu jest bardzo blisko bycia podnoszalną w następującym sensie. Niech

$$Z = \mathrm{Bl}_{\Delta_Y}(Y \times Y)$$

będzie rozdmuchaniem $Y \times Y$ wzdłuż przekątnej Δ_Y. Wówczas rozmaitość Z jest podnoszalna. Jednocześnie, mamy kwadrat kartezjański (pull-back)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{id} \times F_Y"'] & Y \times Y. \end{tikzcd}$$

który można rozbudować do diagramu przemiennego

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "F_X"] & Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "F_Z"] & X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
Y \times Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "F_{Y\times Y}"'] & Y \times Y \arrow[r, "F_Y \times \mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "F_{Y\times Y}"'] & Y \times Y \arrow[r] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Absolutny morfizm Frobeniusa jest homeomorfizmem i indukuje równoważność site'ów etalnych. Wynika stąd, że to samo zachodzi dla morfizmu $u\colon X \to Z$. W szczególności, pierścienie kohomologii ℓ-adycznych

$$H^*_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbf{Z}_\ell) \quad \text{oraz} \quad H^*_{\text{ét}}(Z_{\overline{k}}, \mathbf{Z}_\ell)$$

są izomorficzne jako reprezentacje $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Można też sprawdzić, że grupy kohomologii krystalicznych X i Z są izomorficzne jako F-kryształy, jednak taki izomorfizm nie będzie zgodny z mnożeniem w kohomologiach.

Mówiąc obrazowo, przykład ten pokazuje, że (luźno rozumiany) typ homotopii X „nie widzi" niepodnoszalności X.[3]

4. Teoria Serre'a–Tate'a dla rozmaitości Calabiego–Yau [Hab2]

Teoria Serre'a–Tate'a opisuje deformacje zwyczajnych rozmaitości abelowych nad ciałem doskonałym charakterystyki $p > 0$. Z przedstawionego tutaj punktu widzenia, najłatwiej będzie streścić ją następująco:

> *Baza wersalnej deformacji zwyczajnej rozmaitości abelowej nad pierścieniem wektorów Witta posiada kanoniczne podniesienie Frobeniusa.*

W pracy [Hab2], wraz z Maciejem Zdanowiczem uogólniliśmy teorię Serre'a–Tate'a na zwyczajne rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną. Główną ideą jest stosowanie kanonicznych podniesień indukowanych przez roszczepienia Frobeniusa (F-splittingi).

4.1. Teoria Serre'a–Tate'a dla rozmaitości abelowych

Zanim przejdziemy do dokładniejszego omówienia wyników pracy [Hab2], poświęćmy wpierw uwagę klasycznej teorii Serre'a–Tate'a. Jest to istotne z uwagi na fakt, że teorię tę można przedstawić na wiele sposobów, a tylko niektóre z nich jest sens uogólniać na przypadek rozmaitości Calabiego–Yau. Po dodatkowe szczegóły odsyłamy do prac [Kat81, Del81, Mes72].

4.1.1. **Torsja rozmaitości abelowych.** Niech k będzie ciałem doskonałym charakterystyki $p > 0$ i niech $\overline{k}$ będzie algebraicznym domknięciem k. Niech A będzie rozmaitością abelową

[3] Przykład o podobnej własności został znaleziony wcześniej w pracy [LR97].

wymiaru g nad k, i dla $n \geq 1$ oznaczmy przez $A[n]$ podschemat n-torsji A. Jeżeli p nie dzieli n, wówczas schemat grupowy $A[n]$ jest etalny nad k, a nad $\overline{k}$ istnieje (niekanoniczny) izomorfizm

$$A[n](\overline{k}) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}.$$

Jeżeli natomiast p dzieli n, wówczas schemat grupowy $A[n]$ jest niezredukowany. Przez *p-rangę* A nazywamy liczbę $\rho(A)$ dla której

$$A[p](\overline{k}) \simeq (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\rho(A)}.$$

Mamy $0 \leq \rho(A) \leq g$. Dla $n = p^r$ mamy wtedy izomorfizmy $A[p^r] \simeq (\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^{\rho(A)}$.

Kogranicę (sumę wstępującą) podschematów $A[p^r]$ dla wszystkich $r \geq 1$ nazywamy *grupą p-podzielną* przypisaną A, i oznaczamy przez $A[p^\infty]$. Symbol $A[p^\infty]$ traktujemy jako ind-schemat, lub równoważnie jako snop w topologii fppf na kategorii k-schematów. Istnieje ogólne pojęcie *grupy p-podzielnej* na schemacie S. Oprócz tych pochodzących od rozmaitości abelowych, najprostszymi przykładami są grupa pierwiastków z jedności stopnia będącego potęgą p

$$\mu_{p^\infty} = \mathbf{G}_m[p^\infty]$$

oraz stała grupa p-podzielna $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

Okazuje się, że teoria deformacji rozmaitości abelowej oraz przypisanej jej grupy p-podzielnej są jednakowe:

Twierdzenie 4.1 (Serre–Tate, [Kat81, Theorem 1.2.1])**.** *Niech A_0 będzie rozmaitością abelową nad k i niech R będzie artinowską $W(k)$-algebrą lokalną z ciałem rezidualnym k. Wówczas funktor*

$$\{\textit{deformacje } A_0 \textit{ nad } R\} \longrightarrow \{\textit{deformacje } A_0[p^\infty] \textit{ nad } R\}, \quad A \mapsto A[p^\infty]$$

jest równoważnością kategorii.

4.1.2. **Zwyczajne rozmaitości abelowe.** Powyższe twierdzenie ma bardzo ciekawe wnioski dla deformacji zwyczajnych rozmaitości abelowych. Przed ich sformułowaniem omówmy pokrótce pojęcie zwyczajności.

Definicja 4.2. Rozmaitość abelową A nad k nazywamy *zwyczajną* jeżeli jej p-ranga jest maksymalna: $\rho(A) = \dim(A)$.

Istnieje wiele charakteryzacji zwyczajności, spośród których wymienimy tylko kilka:

Stwierdzenie 4.3. *Niech A będzie rozmaitością abelową wymiaru g nad ciałem doskonałym k charakterystyki $p > 0$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) rozmaitość abelowa A jest zwyczajna (Definicja 4.2),

(b) odwzorowanie Hassego–Witta *(indukowane przez absolutny morfizm Frobeniusa)*

$$F_X^*\colon H^1(A, \mathcal{O}_A) \to H^1(A, \mathcal{O}_A)$$

jest bijektywne;

(c) *odwzorowanie indukowane przez absolutny morfizm Frobeniusa*

$$F_X^*\colon H^g(A,\mathcal{O}_A)\to H^g(A,\mathcal{O}_A)$$

jest niezerowe (równoważnie, bijektywne);

(d) *A jest F-*split, *tj. $\mathcal{O}_A$ jest składnikiem prostym $F_{X,*}\mathcal{O}_A$;*

(e) *F-kryształ $H^1_{\mathrm{cris}}(A/W)$ jest zwyczajny (Definicja 2.5), tj. jego wielokąt Newtona jest równy jego wielokątowi Hodge'a;*

(f) ditto *dla F-kryształu $H^g_{\mathrm{cris}}(A/W)$;*

(g) *istnieje izomorfizm grup p-podzielnych nad $\overline{k}$*

$$A[p^\infty]_{\overline{k}}\simeq(\mu_{p^\infty})^g\times(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^g.$$

4.1.3. **Deformacje zwyczajnych rozmaitości abelowych.** Niech A_0 będzie zwyczajną rozmaitością abelową nad k wymiaru g, niech R będzie artinowską $W(k)$-algebrą z ciałem rezidualnym k, i niech A będzie deformacją A_0 nad $\mathrm{Spec}(R)$. Wówczas grupa p-podzielna $A[p^\infty]$ jest rozszerzeniem swojej podgrupy spójnej (grupy formalnej) $A[p^\infty]^\circ$ i ilorazu, czyli części etalnej $A[p^\infty]_{\text{ét}}$:

$$0\longrightarrow A[p^\infty]^\circ\longrightarrow A[p^\infty]\longrightarrow A[p^\infty]_{\text{ét}}\longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Załóżmy, że k jest algebraicznie domknięte. Część spójna $A[p^\infty]^\circ$ (odp. część etalna $A[p^\infty]_{\text{ét}}$) jest wtedy deformacją $A_0[p^\infty]^\circ\simeq\mu_{p^\infty}^g$ (odp. $A_0[p^\infty]_{\text{ét}}\simeq(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^g$). Jednak zarówno $\mu_{p^\infty}=\varinjlim_r\mu_{p^r}$ jak i $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p=\varinjlim_r\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ są sztywne, tj. nie mają nietrywialnych deformacji (ściślej: każda deformacja jest kanonicznie izomorficzna z μ_{p^∞} lub $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$). Zatem powyższe rozszerzenie otrzymuje postać:

$$0\longrightarrow\mu_{p^\infty}^g\longrightarrow A[p^\infty]\longrightarrow(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^g\longrightarrow 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób element grupy rozszerzeń

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{fppf}}((\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^g,\mu_{p^\infty}^g)\quad\simeq\quad\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{fppf}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p,\mu_{p^\infty})^{g^2}.$$

Stwierdzenie 4.4 ([Mes72, Appendix A, Proposition 2.5])**.** *Istnieje kanoniczny izomorfizm funktorów na kategorii artinowskich $W(k)$-algebr lokalnych z ciałem rezidualnym k*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{fppf}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p,\mu_{p^\infty})\simeq\widehat{\mathbf{G}}_m.$$

Dla uściślenia, powyższe dwa funktory sa zdefiniowane następująco:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{fppf}}(\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p,\mu_{p^\infty})(R)=\left\{\begin{matrix}\text{klasy izomorfizmu rozszerzeń snopów fppf nad }\mathrm{Spec}(R)\\ \text{postaci}\quad 0\to\mu_{p^\infty}\to\mathcal{F}\to\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p\to 0\end{matrix}\right\}$$

$$\widehat{\mathbf{G}}_m(R)=\ker(R^\times\to k^\times)=1+\mathfrak{m}_R$$

Zauważmy, że funktor $\widehat{\mathbf{G}}_m$ jest pro-reprezentowalny (jest to po prostu formalne uzupełnienie schematu grupowego $\mathbf{G}_{m,W}$ w elemencie neutralnym):

$$\widehat{\mathbf{G}}_m \simeq \operatorname{Spf} W[\![q-1]\!].$$

Formalnym torusem nad W nazwiemy grupę formalną T nad W (czyli pro-reprezentowalny obiekt grupowy w kategorii funktorów $\mathbf{Art}_W^k \to \mathbf{Set}$) dla której istnieje izomorfizm

$$T \otimes_W W(\bar{k}) \simeq \widehat{\mathbf{G}}_m^r$$

dla pewnego $r \geq 0$. Powyższą dyskusję możemy wtedy podsumować następująco:

Twierdzenie 4.5. *Niech A_0 będzie zwyczajną rozmaitością abelową wymiaru g nad k. Wówczas* $\operatorname{Def}_{A_0/W}$ *ma strukturę formalnego torusa nad W wymiaru g^2.*

Dla dowolnego formalnego torusa T nad W, odwzorowanie mnożenia przez p jest podniesieniem Frobeniusa na T. Otrzymujemy zatem:

Wniosek 4.6. *Niech A_0 będzie zwyczajną rozmaitością abelową nad k. Wówczas* $\operatorname{Def}_{A_0/W}$ *jest wyposażone w kanoniczne podniesienie Frobeniusa $\widetilde{F}$.*

Jak udowodnił Katz [Del81, Appendix], podniesienie Frobeniusa $\widetilde{F}$ jest jedynym które jest homomorfizmem grup, zaś struktura grupowa na $\operatorname{Def}_{A_0/k}$ jest jedyną strukturą grupową dla której $\widetilde{F}$ jest homomorfizmem.

4.1.4. **Kanoniczne podniesienie.** Niech A będzie zwyczajną rozmaitością abelową nad k. Jak zobaczyliśmy powyżej, zbiór

$$\operatorname{Def}_{A/W}(W) := \varprojlim_n \operatorname{Def}_{A/W}(W_{n+1}(k))$$

ma strukturę grupy. W szczególności, element neutralny w strukturze grupowej daje wyróżniony element $\operatorname{Def}_{A/W}(W)$ odpowiadający formalnemu schematowi abelowemu

$$\widetilde{\mathcal{A}} = (\widetilde{A}_n)_{n\geq 0}, \qquad \widetilde{A}_n \in \mathbf{Def}_{A/W}(W_{n+1}(k)).$$

Z konstrukcji wynika, że $\widetilde{A}_n$ jest jedynym podniesieniem A do $W_n(k)$ dla którego ciąg dokładny (4.1) się rozszczepia. Schemat $\widetilde{A}_n$ (wyznaczony z dokładnością do izomorfizmu) nazywamy *podniesieniem kanonicznym* A do $W_{n+1}(k)$. Pokazuje się, że morfizm obcięcia

$$\operatorname{Pic}(\widetilde{\mathcal{A}}) = \varprojlim_n \operatorname{Pic}(\widetilde{A}_n) \longrightarrow \operatorname{Pic}(A)$$

ma naturalne cięcie. W związku z tym na mocy twierdzenia Grothendiecka o istnieniu [Ill05] schemat formalny $\widetilde{\mathcal{A}}$ jest algebraizowalny, tj. istnieje schemat abelowy $\widetilde{A}$ nad W którego uzupełnieniem p-adycznym jest $\widetilde{\mathcal{A}}$. Schemat abelowy $\widetilde{A}$ nazywamy *podniesieniem kanonicznym* A do W.

Stwierdzenie 4.7. *Niech A będzie zwyczajną rozmaitością abelową nad k. Dla każdego $n \geq 0$, podniesienie kanoniczne $\widetilde{A}_n$ jest jedynym z dokładnością do izomorfizmu podniesieniem A do $W_{n+1}(k)$ do którego podnosi się morfizm Frobeniusa F_A.*

Istnieje też użyteczna charakteryzacja kanonicznego podniesienia w terminach teorii Hodge'a:

Stwierdzenie 4.8. *Niech A będzie zwyczajną rozmaitością abelową nad k. Dla każdego $n \geq 0$, podniesienie kanoniczne $\widetilde{A}_n$ jest jedynym z dokładnością do izomorfizmu podniesieniem A do $W_{n+1}(k)$ dla którego krystaliczny Frobenius*

$$\varphi \colon H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{A}_n/W_{n+1}(k)) \to H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{A}_n/W_{n+1}(k))$$

zachowuje podmoduł $\mathrm{Fil}^1 H^1_{\mathrm{dR}}(\widetilde{A}_n/W_{n+1}(k))$.

Uwaga 4.9. W [MS87, Appendix], Nori i Srinivas rozszerzyli większość z powyższych faktów na przypadek zwyczajnych rozmaitości z trywialną wiązką styczną.

4.1.5. **Teoria Serre'a–Tate'a dla powierzchni K3.** Wersja teorii Serre'a–Tate'a dla zwyczajnych powierzchni K3 została odkryta przez Nygaarda i Ogusa [Nyg83] w kontekście hipotezy Tate'a. Opiera się ona na konstrukcji powiększonej formalnej grupy Brauera [AM77]. Niezależnie, podobne wyniki za pomocą F-kryształów Hodge'a uzyskał Deligne [Del81].

Przez *powierzchnię K3* nad ciałem k rozumiemy gładki i rzutowy geometrycznie spójny schemat X wymiaru 2 nad k taki, że

$$\omega_X \simeq \mathcal{O}_X \quad \text{oraz} \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Wówczas $H^2(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^2(X, \omega_X)$ ma wymiar 1 nad k, natomiast grupa $H^1(X, \Omega^1_X)$ ma wymiar 20. Funktor deformacji $\mathrm{Def}_{X/W}$ jest izomorficzny ze $\mathrm{Spf}(W[\![t_1, \ldots, t_{20}]\!])$.

Stwierdzenie 4.10. *Niech X będzie powierzchnią K3 nad ciałem doskonałym k charakterystyki $p > 0$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) $F_X^* \colon H^2(X, \mathcal{O}_X) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$ *jest bijekcją;*

(b) *X jest F-split,*

(c) *F-kryształ $H^2_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest zwyczajny.*

Definicja 4.11. Powierzchnię K3 nad k nazywamy *zwyczajną*, jeżeli zachodzą równoważne warunki ze Stwierdzenia 4.10.

Konstrukcja Artina i Mazura [AM77, IV 1] pozwala przypisać zwyczajnej powierzchni K3 X grupę p-podzielną Ψ_X. Dla jej opisu potrzebne są części kohomologii krystalicznych $H^2_{\mathrm{cris}}(X/W)$ o nachyleniu 0 i 1, czyli odpowiednio

$$U = H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)^{\varphi=1}, \qquad E = H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)^{\varphi=p};$$

są to wolne $\mathbf{Z}_p$-moduły rangi odpowiednio 1 oraz 20. Podgrupa spójna (formalna) Ψ_X to formalna grupa Brauera Φ_X, izomorficzna z $\mu_{p^\infty} \otimes U$, natomiast iloraz etalny Ψ_X/Φ_X jest utożsamiony z $E \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Mamy zatem ciąg dokładny (odpowiednik (4.1))

$$0 \longrightarrow \mu_{p^\infty} \otimes U \longrightarrow \Phi_X \longrightarrow \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \otimes E \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

Jak w przypadku rozmaitości abelowych, naturalna transformacja

$$\mathrm{Def}_{X/W} \longrightarrow \mathrm{Def}_{\Psi_X/W}$$

jest izomorfizmem, a jej przeciwdziedzina $\mathrm{Def}_{\Psi_X/W}$ jest formalnym torusem (rangi 20) nad W, kanonicznie izomorficznym z $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(E,U) \otimes \widehat{\mathbf{G}}_m$. Podnoszenie do p-tej potęgi w działaniu grupowym torusa daje podniesienie Frobeniusa na $\mathrm{Def}_{X/W}$. Kanoniczne podniesienie formalne $\widetilde{\mathfrak{X}}$ nad W (jedyne, dla którego zdeformowane rozszerzenie (4.2) się rozszczepia) jest algebraizowalne, dając powierzchnię K3 $\widetilde{X}$ nad W, jedyne podniesienie dla którego Frobenius krystaliczny na $H^2_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}/W)$ zachowuje filtrację Hodge'a. W odróżnieniu od rozmaitości abelowych, morfizm Frobeniusa X nie podnosi się jednak do $\widetilde{X}$.

4.2. Teoria Serre'a–Tate'a dla rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną (I)

Przechodzimy do omówienia wyników [Hab2]. W pracy tej zaprezentowaliśmy dwa warianty teorii Serre'a–Tate'a. Pierwszy z nich, omówiony poniżej, jest podobny do teorii Serre'a–Tate'a dla powierzchni K3 opisanej powyżej, wymaga on jednak dość silnych założeń, takich jak formalna gładkość funktora deformacji. Drugi wariant zostanie omówiony dalej w §4.4

4.2.1. **Rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną.** Niech k będzie ciałem doskonałym charakterystyki $p > 0$. Przez *rozmaitość z trywialną wiązką kanoniczną*[4] nad k rozumiemy rozmaitość gładką i rzutową X nad k taką, że $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$.

Lemat 4.12. *Niech X będzie rozmaitością z trywialną wiązką kanoniczną nad k i niech $d = \dim(X)$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) X jest F-split;

(ii) na X istnieje dokładnie jedno rozszczepienie Frobeniusa;

(iii) $F_X^*\colon H^d(X,\mathcal{O}_X) \to H^d(X,\mathcal{O}_X)$ jest niezerowe (równoważnie, bijektywne).

Jeżeli $H^{d-1}(X,\mathcal{O}_X) = 0$, warunki te są równoważne warunkom

(iv) odwzorowanie $F_X^*\colon H^d(X,W\mathcal{O}_X) \to H^d(X,W\mathcal{O}_X)$ jest bijektywne;

(v) grupa formalna Artina–Mazura Φ_X ma wysokość jeden (tj. jest izomorficzna z $\widehat{\mathbf{G}}_m$).

Warunek bycia F-split jest zatem najsłabszym warunkiem typu zwyczajności.

[4] W literaturze czasami nazywamy takie rozmaitości *rozmaitościami Calabiego–Yau*. Często jednak używamy tego określenia dla rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną spełniającej dodatkowe warunki, np. $H^i(X,\mathcal{O}_X) = 0$ dla $0 < i < \dim X$. Z uwagi na tę niejednoznaczność, unikamy określenia *rozmaitość Calabiego–Yau* wewnątrz pracy [Hab2].

4.2.2. **Definicja m-zwyczajności.** W kontekście teorii Serre'a–Tate'a dla rozmaitości Calabiego–Yau wymiaru > 2 istotne są warunki słabsze od zwyczajności w sensie Definicji 2.5. Intuicyjnie, rozmaitość z trywialną wiązką kanoniczną jest m-zwyczajna ($m \geq 1$) jeżeli wielokąty Newtona i Hodge'a jej środkowych kohomologii krystalicznych mają wspólnych m pierwszych odcinków. Z naszego punktu widzenia istotne będą 1-zwyczajność, która jest mniej więcej równoważna byciu F-split[5] dzięki Lematowi 4.12, oraz 2-zwyczajność.

Definicja 4.13. Niech H będzie F-kryształem nad k oraz niech $m \geq 1$. Powiemy, że H jest m-zwyczajny jeżeli

$$H_0 = (\mathrm{Fil}_i H_0) \oplus (\mathrm{Fil}^{i+1} H_0) \qquad \text{dla } i < m.$$

Definicja 4.14. Niech X będzie rozmaitością z trywialną wiązką kanoniczną nad k i niech $d = \dim(X)$. Załóżmy, że grupy kohomologii krystalicznych $H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)$ oraz $H^{d+1}_{\mathrm{cris}}(X/W)$ są beztorsyjne, oraz że ciąg Hodge'a–de Rhama X/k (2.4) się degeneruje.

(a) Powiemy, że X jest *m-zwyczajna* ($m \geq 1$) jeżeli F-kryształ $H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest m-zwyczajny w myśl Definicji 4.13.

(b) Powiemy, że X jest *zwyczajna* (w sensie Blocha–Kato) jeżeli F-kryształ $H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)$ jest zwyczajny w sensie Definicji 2.5, lub równoważnie gdy X jest d-zwyczajna.

4.2.3. **Teoria Serre'a–Tate'a w stylu Nygaarda.** Poniższe twierdzenie stanowi wariant teorii Serre'a–Tate'a dla powierzchni K3 [Nyg83] działający w wyższych wymiarach. W wymiarze 3, taki odpowiednik został znaleziony wcześniej w doktoracie M. Warda [War14].

Twierdzenie 4.15 (Zob. [Hab2, Theorem 1])**.** *Niech X będzie gładką i rzutową rozmaitością z trywialną wiązką kanoniczną wymiaru d nad algebraicznie domkniętym ciałem k charakterystyki $p > 0$. Załóżmy, że*

1. $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *oraz* $H^0(X, T_X) = 0$*;*
2. *X jest 2-zwyczajna (w szczególności zachodzą dodatkowe warunki w Definicji 4.14);*
3. *X ma deformacje bez przeszkód nad $W_m(k)$ dla pewnego $m \geq 1$.*

Oznaczmy

$$U = H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)^{\varphi=1}, \qquad H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)^{\varphi=p},$$

są to wolne $\mathbf{Z}_p$-moduły rangi odpowiednio 1 oraz $r = \dim H^{d-1}(X, \Omega^1_X)$. Mamy wówczas kanoniczny izomorfizm

$$\mathrm{Def}_{X/W_m(k)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(E, U) \otimes \widehat{\mathbf{G}}_m,$$

oraz indukowane podniesienie Frobeniusa $\widetilde{F}$ na $\mathrm{Def}_{X/W_m(k)}$.

Dowód powyższego twierdzenia jest w dużej mierze oparty na pomysłach Nygaarda i Ogusa [Nyg83] w kontekście powierzchni K3. Główną choć nieco ukrytą rolę pełni grupa p-podzielna Ψ_X której moduł Dieudonné jest równy części F-kryształu $H^d_{\mathrm{cris}}(X/W)$ o nachyleniu ≤ 1.

[5] Związek pomiędzy zwyczajnością a rozszczepieniami Frobeniusa został zbadany w pracy [JR03].

4.3. Kanoniczne podniesienia modulo p^2

Niech X będzie schematem nad $\mathbf{F}_p$. Przez *F-splitting* (lub *F-rozszczepienie*) na X rozumiemy $\mathcal{O}_X$-liniowy homomorfizm

$$\sigma \colon F_{X,*}\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

taki, że $F_X^* \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Oznaczmy przez $I(\sigma) \subseteq W_2(\mathcal{O}_X)$ następujący podsnop, w rzeczywistości snop ideałów:

$$I(\sigma) = \{(f_0, f_1) \in W_2(\mathcal{O}_X) \, : \, \sigma(f_1) = 0\}.$$

Stwierdzenie 4.16 (M. Zdanowicz [Zda18])**.** *Przestrzeń upierścieniona*

$$X(\sigma) = (|X|, W_2(\mathcal{O}_X)/I(\sigma))$$

jest płaskim schematem nad $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Rzutowanie $W_2(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X$ indukuje izomorfizm

$$X(\sigma) \otimes \mathbf{F}_p \simeq X,$$

czyli $X(\sigma)$ jest deformacją X nad $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.

Definicja 4.17. Niech (X, σ) będzie obiektem kategorii $\mathbf{FSplit}_{\mathbf{F}_p}$, tj. X jest schematem nad $\mathbf{F}_p$ a σ jest rozszczepieniem Frobeniusa na X. Schemat $X(\sigma)$ jak w Stwierdzeniu 4.16 nazywamy *kanonicznym podniesieniem* pary (X, σ) nad $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.

Uwaga 4.18. Jak zaobserwował Bhatt [Lan15, Proposition 8.4], fakt, że każdy F-rozszczepialny schemat X nad $\mathbf{F}_p$ podnosi się do $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ można zobaczyć w następujący sposób. Dla uproszczenia załóżmy, że X jest gładki nad $\mathbf{F}_p$ (w przeciwnym przypadku ten sam argument działa jeżeli snopy różniczek zamienić na kompleks kostyczny [Ill71]). Zgodnie z funktorialnością przeszkód §2.5 mamy następujący przemienny kwadrat w kategorii pochodnej X

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{X/\mathbf{F}_p} \arrow[rr, "\mathrm{obs}(X/\mathbf{F}_p/(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))"] \arrow[d, "F_X^*=0"'] & & \mathcal{O}_{X'}[2] \arrow[d, "F_X^*"'] \\
F_{X,*}\Omega^1_{X/\mathbf{F}_p} \arrow[rr, "F_*\mathrm{obs}(X/\mathbf{F}_p/(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}))"'] & & F_{X,*}\mathcal{O}_X[2] \arrow[u, bend right, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Strzałka po lewej jest równa zeru, gdyż $F_X^*(df) = dF_X^*(f) = df^p = pf^{p-1}df = 0$. Z przemienności kwadratu oraz faktu, że $\sigma \circ F_X^* = \mathrm{id}$ wynika wtedy, że górna strzałka jest równa zeru. Zatem X podnosi się do $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.

4.4. Teoria Serre'a–Tate'a dla rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną (II)

Większa (i ciekawsza) część pracy [Hab2] dotyczy związku kanonicznych podniesień modulo p^2 dla schematów F-split opisanych w poprzednim podrozdziale i teorii Serre'a–Tate'a.

Jeżeli rozmaitość z trywialną wiązką kanoniczną X jest F-split, wówczas istnieje na niej dokładnie jedno rozszczepienie Frobeniusa σ (Lemat 4.12). Indukuje ono kanoniczne podniesienie $X(\sigma)$ nad $W_2(k)$, które oznaczamy przez $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ i nazywamy *kanonicznym podniesieniem X*.

Okazuje się, że owe kanoniczne podniesienia są częścią wariantu teorii Serre'a–Tate'a dla rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną. W szczególności, przy pewnych założeniach otrzymujemy podniesienia Frobeniusa na przestrzeniach formalnych deformacji. Co ciekawe, w ogólności nie istnieje na tych przestrzeniach zgodna struktura grupowa jak w przypadkach omawianych wcześniej, o ile nie zakładamy silniejszego warunku 2-zwyczajności. W istocie, jednym z ciekawszych odkryć jest związek pomiędzy pierwszą wyższą macierzą Hassego–Witta $\mathrm{HW}(1)$ oraz podniesieniem Frobeniusa $\widetilde{F}$ na przestrzeni deformacji X.

Oczywistym mankamentem teorii, prawdopodobnie niemożliwym do obejścia, jest fakt, że działa ona tylko modulo p^2. Jednak, w świetle wyników Deligne'a i Illusiego (§2.6), wariant „modulo p^2" może być bardzo pomocny w badaniu zwyczajnych rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną w dodatniej charakterystyce.

4.4.1. **Kanoniczne podniesienia modulo p^2.** Niech X będzie rozmaitością z trywialną wiązką kanoniczną nad k i niech σ będzie (jedynym) rozszczepieniem Frobeniusa na X. Niech

$$\widetilde{X}_{\mathrm{can}} = \widetilde{X}(\sigma)$$

będzie odpowiadającym mu podniesieniem kanonicznym modulo p^2. Z konstrukcji, $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ jest domkniętym podschematem w $W_2(X)$. Ponieważ dla dowolnego pierścienia R, morfizm obcięcia $W_2(R) \to R$ ma kanoniczny multyplikatywny przekrój, tzw. *podniesienie Teichmüllera*

$$f \in R \quad \mapsto \quad (f,0) \in W_2(R)$$

wnioskujemy, że morfizm obcięcia $\mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{can}}} \to \mathcal{O}_X$ również ma kanoniczny multyplikatywny przekrój, zdefiniowany jako

$$f \in \mathcal{O}_X \quad \mapsto \quad ((f,0) \bmod I(\sigma)) \in W_2(\mathcal{O}_X)/I(\sigma) = \mathcal{O}_{\widetilde{X}_{\mathrm{can}}}.$$

Ta prosta obserwacja ma bardzo poważne wnioski (wydaje się, że nieznane wcześniej nawet w przypadku kanonicznych podniesień rozmaitości abelowych): każda wiązka liniowa na X podnosi się (w kanoniczny sposób) do kanonicznego podniesienia $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$; podobnie dla dywizorów Cartiera oraz struktur logarytmicznych oraz klas w grupie Brauera. Dodatkowych ciekawych własności kanonicznego podniesienia $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ dostarcza twierdzenie omówione w następnym akapicie.

4.4.2. **Frobenius i filtracja Hodge'a.** Kanoniczne podniesienie $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ jest zdefiniowane explicite za pomocą wektorów Witta $W_2(\mathcal{O}_X)$ i rozszczepienia Frobeniusa na X. Jednak bardzo trudno jest wypisać je jawnymi wzorami nawet w prostych przypadkach.[6] Jednym z głębszych i trudniejszych wyników [Hab2] jest związek kanonicznego podniesienia $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ z teorią Hodge'a wyrażony poniżej. Pozwala to np. na porównanie naszych kanonicznych podniesień z ich klasycznymi wariantami dostępnymi gdy X jest rozmaitością abelową lub powierzchnią K3.

[6]Pewne ciekawe postępy w tym kierunku poczynił P. Grabowski w swojej pracy magisterskiej [Gra20].

Twierdzenie 4.19 (Zob. [Hab2, Theorem 2])**.** *Niech X będzie 1-zwyczajną gładką i rzutową rozmaitością z trywialną wiązką kanoniczną wymiaru d nad k, i niech $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ będzie kanonicznym podniesieniem X nad $W_2(k)$. Wówczas krystaliczny Frobenius*

$$\varphi\colon H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_{\mathrm{can}}/W_2(k)) \longrightarrow H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_{\mathrm{can}}/W_2(k))$$

zachowuje podmoduł $\mathrm{Fil}^1 H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_{\mathrm{can}}/W_2(k))$ *(obraz $H^d(\widetilde{X}, \Omega^{\bullet \geq 1}_{\widetilde{X}_{\mathrm{can}}}) \to H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_{\mathrm{can}}/W_2(k))$).*

Jeżeli $p > 2$ i jeśli zachodzą pewne dodatkowe założenia, $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$ jest jedynym podniesieniem X o tej własności [Hab2, Theorem 6.7.1]. Pozwala to porównać nasze podniesienia kanoniczne modulo p^2 z tymi otrzymanymi z bardziej klasycznych wariantów teorii Serre'a–Tate'a dla rozmaitości abelowych oraz K3 [Hab2, Corollary 6.7.2].

Dowód powyższego twierdzenia jest dość długi i skomplikowany. Opiera się on z jednej strony na analizie kompleksu PD-de Rhama dla PD powłoki $\widetilde{X}$ w gładkim $W_2(k)$-schemacie $\widetilde{Y}$ wyposażonym w podniesienie Frobeniusa, z drugiej na związku wektorów Witta $W_2(\mathcal{O}_X)$ z kohomologiami krystalicznymi, w którym pośredniczy kompleks de Rhama–Witta.

4.4.3. **Podniesienia kanoniczne w rodzinach.** Dalsza część pracy [Hab2] opiera się na relatywnej wersji konstrukcji kanonicznych podniesień opisanej w §4.3. Jest to zaskakujące o tyle, że nie jest znane ogólne pojęcie *relatywnych wektorów Witta*. W naszej pracy podajemy jednak konstrukcję w szczególnym przypadku wektorów długości dwa w przypadku gładkiego morfizmu schematów.

Niech $X \to S$ będzie gładkim morfizmem schematów nad $\mathbf{F}_p$, zaś $\widetilde{S}$ płaskim podniesieniem S nad $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Niech $X' \to S$ będzie cofnięciem $X \to S$ wzdłuż Frobeniusa F_S. Konstruujemy wówczas snop pierścieni $W_2(\mathcal{O}_X/\widetilde{S})$, zwany snopem *relatywnych wektorów Witta długości dwa*, na przestrzeni $|X'| = |X|$, będący rozszerzeniem o kwadracie zero $\mathcal{O}_{X'}$ przez $F_{X/S,*}\mathcal{O}_X$:

$$0 \longrightarrow F_{X/S,*}\mathcal{O}_X \longrightarrow W_2(\mathcal{O}_X/\widetilde{S}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow 0.$$

Przestrzeń lokalnie upierścieniona $(|X'|, W_2(\mathcal{O}_X/\widetilde{S}))$ jest schematem, oznaczanym przez $W_2(X/\widetilde{S})$.

Jeżeli $\sigma\colon F_{X/S,*}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}$ jest *relatywnym roszczepieniem Frobeniusa* dla $X \to S$, czyli $\mathcal{O}_{X'}$-liniowym rozszczepieniem $F^*_{X/S}\colon \mathcal{O}_{X'} \to F_{X/S,*}\mathcal{O}_X$, wówczas wariant konstrukcji §4.3 daje płaskie podniesienie X' do $\widetilde{S}$, oznaczone przez $\widetilde{X}'(\sigma)$, które jest domkniętym podschematem w $W_2(X/\widetilde{S})$ wyciętym przez snop ideałów $\ker(\sigma) \subseteq F_{X/S,*}\mathcal{O}_X$.

Jeżeli X/S jest rodziną rozmaitości z trywialną wiązką kanoniczną której włókna są F-split, wówczas istnieje dokładnie jedno relatywne rozszczepienie Frobeniusa $\sigma\colon F_{X/S,*}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X'}$. Oznaczamy przez

$$\widetilde{X}'_{\mathrm{can}}$$

kanoniczne podniesienie $\widetilde{X}'(\sigma)$ nad $\widetilde{S}$ indukowane przez to roszczepienie Frobeniusa.

Twierdzenie 4.19 uogólnia się na przypadek relatywny: dla kanonicznego podniesienia $\widetilde{X}'_{\mathrm{can}}$, oraz dla dowolnego podniesienia Frobeniusa $F_{\widetilde{S}}$ na $\widetilde{S}$, krystaliczny Frobenius

$$\varphi(F_{\widetilde{S}})\colon F^*_{\widetilde{S}} H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}'_{\mathrm{can}}/\widetilde{S}) \longrightarrow H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}'_{\mathrm{can}}/\widetilde{S})$$

odwzorowuje $F_{\widetilde{S}}^*(\mathrm{Fil}^1)$ w Fil^1 [Hab2, Theorem 6.0.1].

Zwróćmy uwagę, że podniesienia kanoniczne w rodzinach nie są dobrze zbadane w literaturze nawet w klasycznym przypadku schematów abelowych (za wyjątkiem pracy [BG19]). Trudność polega nad tym, że jeżeli A/S jest zwyczajnym schematem abelowym i S_n $(n \geq 0)$ jest płaskim podniesieniem S do $\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}$, wówczas to nie rodzina A/S posiada kanoniczne podniesienie $\widetilde{A}_n/S_n$, a jej n-krotne cofnięcie Frobeniusem $(F_S^n)^*A/S$. Jeżeli skupiamy się na podniesieniach kanonicznych nad $\mathbf{Z}_p$, wówczas musielibyśmy wziąć $n = \infty$, czyli perfekcję schematu bazowego S.

4.4.4. **Podniesienia Frobeniusa na przestrzeni deformacji.** Niech X będzie rozmaitością z trywialną wiązką kanoniczną nad k. Załóżmy, że funktor deformacji $\mathrm{Def}_{X/W_2(k)}$ jest pro-reprezentowalny, i oznaczmy przez $\widetilde{S}$ odpowiadający mu schemat formalny nad $W_2(k)$, zwany *przestrzenią deformacji* X. Oznaczmy przez X_{univ} uniwersalną deformację X nad $\widetilde{S}$. Teoria relatywnych podniesień kanonicznych, dzięki lematowi Yonedy, wyposaża przestrzeń deformacji X w kanoniczne podniesienie Frobeniusa

$$\widetilde{F} \colon \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{S};$$

jest to jedyny morfizm dla którego istnieje izomorfizm deformacji X'

$$\widetilde{F}^* X_{\mathrm{univ}} \simeq \widetilde{X}'_{\mathrm{can}}.$$

Dla $p > 2$ i przy pewnych dodatkowych założeniach jest to jedyne podniesienie Frobeniusa zgodne z filtracją Hodge'a [Hab2, Corollary 8.4.4].

Jak widzieliśmy wcześniej, operator Hassego–Witta (odwzorowanie indukowane przez Frobeniusa)

$$\mathrm{HW}(0) \colon H^d(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^d(X, \mathcal{O}_X)$$

jest ściśle związany z 1-zwyczajnością X. Jednym z ciekawszych odkryć w [Hab2] jest związek podniesienia Frobeniusa $\widetilde{F}$ z pierwszym wyższym operatorem Hassego–Witta

$$\mathrm{HW}(1) \colon H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X).$$

Jest to p-liniowe odwzorowanie zdefiniowane przez Katza [Kat72] które jest zdefiniowane jeżeli X jest 1-zwyczajne, i jest izomorfizem wtedy i tylko wtedy gdy X jest 2-zwyczajne. W [Hab2, Corollary 6.0.3] pokazujemy związek tego odwzorowania z kanonicznym podniesieniem $\widetilde{X}_{\mathrm{can}}$: $\mathrm{HW}(1)$ jest morfizmem indukowanym przez podzielenie krystalicznego Frobeniusa na $\mathrm{Fil}^1 H^d_{\mathrm{dR}}(\widetilde{X}_{\mathrm{can}}/W_2(k))$ przez p, co ma sens dzięki Twierdzeniu 4.19.

Załóżmy, że schemat formalny $\widetilde{S}$ jest formalnie gładki nad $W_2(k)$, tj.

$$\widetilde{S} \simeq \mathrm{Spf}(W_2(k)[\![x_1, \ldots, x_r]\!]), \qquad r = \dim H^1(X, T_X).$$

Oznaczmy przez $\Omega^1_{\widetilde{S}}$ moduł ciągłych różniczek $\widetilde{S}$ nad $W_2(k)$; jest to wolny $\mathcal{O}_{\widetilde{S}}$-moduł rozpięty przez $dx_1, \ldots, dx_r$, a jego włókno w punkcie domkniętym jest izomorficzne z przestrzenią dualną do $H^1(X, T_X)$. Podobnie definiujemy S jako redukcję $\widetilde{S}$ modulo p, co pro-reprezentuje funktor $\mathrm{Def}_{X/k}$ deformacji X nad k.

Z drugiej strony zależności pomiędzy $\mathrm{HW}(1)$ a $\widetilde{F}$ jest odwzorowanie

$$\xi : F_S^*\Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_S^1$$

indukowane przez $\widetilde{F}$ (zob. §5.1). Za Mochizukim [Moc96], podniesienie $\widetilde{F}$ nazywamy *zwyczajnym* jeżeli odwzorowanie ξ jest izomorfizmem. Oznaczmy przez $\xi^\vee$ odwzorowanie dualne

$$\xi^\vee : T_S \longrightarrow F_S^* T_S.$$

Biorąc włókno w punkcie domkniętym S dostajemy p-liniowe odwzorowanie

$$\xi^\vee(0) : H^1(X, T_X) \longrightarrow H^1(X, T_X).$$

Twierdzenie 4.20. *Następujący kwadrat jest przemienny*

$$\begin{tikzcd} H^1(X,T_X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\xi^\vee(0)"'] & \mathrm{Hom}(H^{d-1}(X,\Omega_X^1), H^d(X,\mathcal{O}_X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{HW}(1),\mathrm{HW}(0)^{-1})"] \\ H^1(X,T_X) \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Hom}(H^{d-1}(X,\Omega_X^1), H^d(X,\mathcal{O}_X)). \end{tikzcd}$$

Wniosek 4.21. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) rozmaitość X jest 2-zwyczajna;

(ii) kanoniczne podniesienie Frobeniusa $\widetilde{F}$ na przestrzeni deformacji $\widetilde{S}$ jest zwyczajne.

Podniesienie Frobeniusa $\widetilde{F}$ pozwala, przy pewnych założeniach, otrzymać kanoniczne współrzędne na $\widetilde{S}$ [Hab2, Corollary 9.3.2].

5. Podniesienia Frobeniusa [Hab3]

Istnienie morfizmu Frobeniusa czyni geometrię algebraiczną nad $\mathbf{F}_p$ istotnie odmienną od geometrii w charakterystyce zero. W pracy [Hab3] wspólnej z J. Witaszkiem i M. Zdanowiczem, jak również w jej drugiej części [AWZ20], badamy kiedy rozmaitość (gładka i rzutowa) w charakterystyce p może zostać podniesiona modulo p^2 wraz z Frobeniusem.

Definicja 5.1. Schemat X nad k nazywamy *F-podnoszalnym* jeżeli istnieje podniesienie $\widetilde{X}$ nad $W_2(k)$ wraz z podniesieniem Frobeniusa, tj. morfizmem $\widetilde{F} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ takim, że $\widetilde{F} \otimes k = F$. Taką parę $(\widetilde{X}, \widetilde{F})$ nazwiemy *F-podniesieniem* schematu X.

Każda gładka rozmaitość afiniczna X jest F-podnoszalna. Istotnie, stosowne przeszkody do podniesienia X oraz $F_{X/k}$ leżą w grupach

$$H^2(X, T_X) \quad \text{oraz} \quad H^1(X, F_{X/k}^* T_{X'})$$

które znikają jeżeli X jest afiniczny. Gładkość X jest istotna, i jest ciekawym pytaniem jakie osobliwości mogą być F-podnoszalne. Praca [Zda18] dostarcza pewnych odpowiedzi na to pytanie.

Dowolna rozmaitość toryczna jest F-podnoszalna [BTLM97]. Dla przykładu, rozważmy afiniczną rozmaitość toryczną

$$X = \operatorname{Spec} k[P], \qquad P = \sigma^\vee \cap M$$

(używamy tutaj notacji z [Ful93]: $M \simeq \mathbf{Z}^r$ jest kratą, $M = N^\vee$ jest kratą dualną, $\sigma \subseteq N_\mathbf{R}$ jest stożkiem wypukłym rozpiętym przez skończony podzbiór N niezawierającym żadnej prostej, zaś $\sigma^\vee$ jest stożkiem dualnym). Wtedy

$$\widetilde{X} = \operatorname{Spec} W_2(k)[P], \qquad \widetilde{F}^*(m) = m^p \text{ dla } m \in P$$

definiuje F-podniesienie X.

Z innej strony, jak zobaczyliśmy w §4.1, każda zwyczajna rozmaitość abelowa jest F-podnoszalna. Poniższa hipoteza, na której oparte są prace [Hab3] oraz [AWZ20] mówi, że F-podnoszalność jest bardzo rzadka i w gruncie rzeczy ograniczona do powyższych przykładów: wszystkie przykłady F-podnoszalnych gładkich i rzutowych rozmaitości w charakterystyce $p > 0$ powstają w określony sposób z rozmaitości torycznych oraz zwyczajnych rozmaitości abelowych.

Hipoteza 5.2 ([Hab3, Conjecture 1])**.** *Niech X będzie gładką i rzutową rozmaitością nad ciałem algebraicznie domkniętym k charakterystyki $p > 0$. Jeżeli X jest F-podnoszalna, wówczas istnieje skończone etalne nakrycie Galois $f\colon Y \to X$ takie, że morfizm Albanese rozmaitości Y*

$$a_Y : Y \longrightarrow \operatorname{Alb}(Y)$$

jest torycznym rozwłóknieniem (zob. [Hab3, Definition 2.1.1(b)]). W szczególności, jeżeli X jest jednospójne (np. jeżeli X jest rozdzielczo wymiernie spójne), wtedy X jest rozmaitością toryczną.

Do badania tej hipotezy rozwinęliśmy kilka technik dotyczących podniesień Frobeniusa, opisanych w §5.1. To pozwoliło na potwierdzenie jej prawdziwości w przypadku rozmaitości jednorodnych (§5.2), par log Calabi–Yau (§5.3), oraz (w pracy [AWZ20]) dla powierzchni oraz trójwymiarowych rozmaitości Fano (§5.4). Hipoteza 5.2 ma związki z ciekawymi problemami w zespolonej geometrii algebraicznej, omówionymi w §5.5

5.1. Teoria F-podniesień

Dużą część pracy [Hab3] (oraz jej drugiej części [AWZ20]) zajmuje badanie ogólnych własności F-podnoszalnych rozmaitości. Omówimy teraz pokrótce główne narzędzia.

5.1.1. **Odwzorowanie ξ.** Niech X będzie gładkim schematem nad k i niech $(\widetilde{X}, \widetilde{F})$ będzie F-podniesieniem X. Oznaczmy przez $\widetilde{F}_{X/k}$ indukowane podniesienie relatywnego Frobeniusa.

Ponieważ $F^*_{X/k}\colon \Omega^1_{X/k} \to \Omega^1_{X/k}$ jest odwzorowaniem zerowym, stosując lemat o wężu do diagramu przemiennego o dokładnych wierszach

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^*_{X/k}\Omega^1_{X'/k} \arrow[r, "\times p"] \arrow[d, "F^*_{X/k}=0"'] & \widetilde{F}^*_{X/k}\Omega^1_{\widetilde{X}'/W_2(k)} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{F}^*_{X/k}"] & F^*_{X/k}\Omega^1_{X'/k} \arrow[r] \arrow[d, "F^*_{X/k}=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_{X/k} \arrow[r, "\times p"'] & \Omega^1_{\widetilde{X}/W_2(k)} \arrow[r] & \Omega^1_{X/k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

otrzymujemy morfizm

$$\xi = \frac{\widetilde{F}^*_{X/k}}{p}\colon F^*_{X/k}\Omega^1_{X'/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$$

taki, że $\widetilde{F}^*_{X/k}(\omega) = p \times \xi(\omega \bmod p)$. Jest on injektywny, a jego wyznacznik, traktowany jako element

$$\mathrm{Hom}(F^*_{X/k}\omega_{X'/k}, \omega_{X/k}) \simeq H^0(X, \omega^{1-p}_{X/k}) \simeq \mathrm{Hom}(F_{X,*}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

indukuje rozszczepienie Frobeniusa na X. Prosty wniosek: jeżeli X jest F-podnoszalna, wówczas wymiar Kodairy X jest niedodatni. Natomiast morfizm dołączony

$$\xi^{\mathrm{ad}}\colon \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow F_{X/k,*}\Omega^1_{X/k}$$

ma obraz w snopie form domkniętych $\mathcal{Z}\Omega^1_{X/k} \subseteq F_{X/k,*}\Omega^1_{X/k}$ i indukuje rozszczepienie ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}\Omega^1_{X/k} \longrightarrow \mathcal{Z}\Omega^1_{X/k} \xrightarrow{C} \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow 0.$$

Możemy traktować odwzorowanie ξ jako p-liniowy endomorfizm snopa $\Omega^1_{X/k}$. Wówczas etalny snop jego punktów stałych

$$\mathcal{F}_\xi = (\Omega^1_{X/k})^\xi$$

jest snopem konstruowalnym przestrzeni liniowych nad $\mathbf{F}_p$ na X, którego geometria jest używana w zasadniczy sposób w dowodzie Hipotezy 5.2 dla przestrzeni jednorodnych. W szczególnym przypadku gdy ξ jest izomorfizmem, wówczas $\mathcal{F}_\xi$ jest $\mathbf{F}_p$-systemem lokalnym na X rozpinającym Ω^1_X:

$$\mathcal{F}_\xi \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X/k}.$$

Zgodnie z tym, F-podniesienie X dla którego ξ jest izomorfizmem można uznać za analog struktury afinicznej na X, tzn. beztorsyjnej koneksji całkowalnej na wiązce stycznej.

5.1.2. **Znikanie Botta.** Jak pokazali Deligne i Illusie [DI87] (zob. §2.6), podnoszalność do $W_2(k)$ implikuje wariant *znikania Kodairy–Akizukiego–Nakano*: dla wiązki szerokiej L na rozmaitości gładkiej i rzutowej X podnoszalnej do $W_2(k)$ zachodzi znikanie

$$H^j(X, \Omega^i_X \otimes L^{-1}) = 0 \qquad \text{dla } i+j < \min(p, \dim X).$$

Okazuje się, że F-podnoszalność implikuje dużo silniejsze twierdzenie o znikaniu, tzw. znikanie Botta.

Stwierdzenie 5.3 (Znikanie Botta, [BTLM97])**.** *Niech X będzie F-podnoszalną gładką i rzutową rozmaitością nad k i niech L będzie szeroką wiązką liniową na X. Wówczas*

$$H^j(X, \Omega^i_X \otimes L) = 0$$

dla $j > 0$ oraz $i \geq 0$.

Znikanie Botta jest bardzo rzadkie nawet w charakterystyce zero, do niedawna jedynymi znanymi przykładami były rozmaitości toryczne oraz abelowe. W pracy [Tot20] Totaro konstruuje ciekawe przykłady powierzchni spełniających znikanie Botta.

Jedną z prostych konsekwencji znikania Botta jest fakt, że F-podnoszalne rozmaitości Fano są sztywne: $H^1(X, T_X) = 0$. Z tego faktu korzystamy wielokrotnie w pracach [Hab3] oraz [AWZ20].

5.1.3. **Spychanie F-podnoszalności.** Poniższe twierdzenie pozwala często wywnioskować, dla danego morfizmu $Y \to X$, F-podnoszalność X z F-podnoszalności Y. Jest ono najpoważniejszym technicznym narzędziem pracy [Hab3]. Opiera się ono na technice spychania deformacji (§2.5) oraz funktorialności przeszkód do podnoszenia Frobeniusa.

Twierdzenie 5.4 (Spychanie F-podnoszalności)**.** *Niech $\pi\colon Y \to X$ będzie morfizmem schematów lokalnie skończonego typu nad k i niech $(\widetilde{Y}, \widetilde{F}_Y)$ będzie F-podniesieniem Y.*

(a) Przypuśćmy, że π ma podniesienie $\tilde{\pi}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ oraz że zachodzi jeden z poniższych warunków:

i. $\pi^*\colon \mathcal{O}_X \to R\pi_*\mathcal{O}_Y$ jest odszczepialnym monomorfizmem w kategorii pochodnej,

ii. morfizm π jest skończony i płaski stopnia względnie pierwszego z p,

iii. schemat Y spełnia warunek S_2 a morfizm π jest otwartym włożeniem takim, że $X \setminus Y$ ma kowymiar > 1 w X.

Wtedy F_X podnosi się do $\widetilde{X}$.

(b) Przypuśćmy, że zachodzi jeden z poniższych warunków:

i. $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_Y$ oraz $R^1\pi_*\mathcal{O}_Y = 0$,

ii. X i Y są gładkie a morfizm π jest właściwy i biwymierny,

iii. schemat Y spełnia warunek S_3 a morfizm π jest otwartym włożeniem takim, że $X \setminus Y$ ma kowymiar > 2 w X.

Wtedy istnieje dokładnie jedna para składająca się z F-podniesienia $(\widetilde{X}, \widetilde{F}_X)$ schematu X oraz podniesienia $\tilde{\pi}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ morfizmu π taka, że $\widetilde{F}_X \circ \tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ \widetilde{F}_Y$.

5.2. Rozmaitości jednorodne

W [BTLM97, §4], Buch, Thomsen, Lauritzen i Mehta badają F-podnoszalność wymiernych przestrzeni jednorodnych. W wielu przypadkach udaje im się pokazać, że rozmaitość tego typu nie jest F-podnoszalna ponieważ znikanie Botta (Proposition 5.3) nie zachodzi. Jak w naszym twierdzeniu poniżej (jednak używając innego argumentu) sprowadzają oni pytanie do przypadku liczby Picarda równej jeden. Jednak nawet przy tym założeniu, znalezienie i, j oraz L dla których $H^i(X, \Omega_X^j \otimes L) \neq 0$ jest trudnym zadaniem. W tym celu, autorzy korzystają ze skomplikowanych wyników Snowa [Sno88, Sno86] o kohomologiach rozmaitości flag w charakterystyce zero. Zadają oni pytanie [BTLM97, Remark 2] czy jedynymi F-podnoszalnymi wymiernymi przestrzeniami jednorodnymi są produkty przestrzeni rzutowych. Ponieważ są to dokładnie toryczne rozmaitości jednorodne, jest to szczególny przypadek naszej Hipotezy 5.2, który szczęśliwie udało nam się rozwiązać.

Najogólniejszy wynik w tym kierunku klasyfikuje F-podnoszalne rozmaitości jednorodne, czyli rozmaitości których grupa automorfizmów działa tranzytywnie.

Twierdzenie 5.5 (Zob. [Hab3, Theorem 6.4.5])**.** *Niech X będzie rozmaitością gładką i rzutową nad ciałem algebraicznie domkniętym k charakterystyki $p > 0$ taką, że grupa automorfizmów $\mathrm{Aut}(X)$ działa tranzytywnie na $X(k)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) Rozmaitość X jest F-podnoszalna.

(ii) Istnieje izomorfizm
$$X \simeq A \times \mathbf{P}_k^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}_k^{n_r}$$
dla pewnych liczb całkowitych $n_1, \ldots, n_r \geq 1$, gdzie A jest zwyczajną rozmaitością abelową.

(iii) Rozmaitość Albanese $A = \mathrm{Alb}(X)$ jest zwyczajną rozmaitością abelową a włókna odwzorowania Albanese $a\colon X \to A$ są rozmaitościami torycznymi.

Nasz dowód w przypadku liczby Picarda równej jeden nie korzysta z klasyfikacji przestrzeni jednorodnych ani ze znikania Botta. Istotnie, dla dowodu musimy wiedzieć jedynie, że X jest rozmaitością Fano której wiązka styczna T_X jest nef (zgodnie z trudną hipotezą Campany–Peternella [CP91], [Kol96, V, Conjecture 3.10], te dwa warunki powinny implikować fakt, że X jest rozmaitością jednorodną). Głownymi składnikami dowodu są charakteryzacja przestrzeni rzutowej Moriego oraz delikatne badanie obcięć snopa ξ-niezmienniczych form (zob. §5.1) do pewnych szczególnych rodzin krzywych wymiernych [Kol96].

Dla ogólnego przypadku, niestety musimy podeprzeć się nieco klasyfikacją przestrzeni jednorodnych, ale tylko po to by sprawdzić dla których wierzchołki których diagramów Dynkina odpowiednia przestrzeń jednorodna o liczbie Picarda jeden jest przestrzenią rzutową. Wynik Lauritzena i Mehty [LM97] pozwala nam uniknąć niezredukowanych stabilizatorów. Nasze metody dają nadzieję na dowód większej liczby szczególnych przypadków Hipotezy 5.2 z liczbą Picarda równą jeden.

5.3. F-podnoszalne pary log Calabi–Yau

Jak udowodnili Mehta i Srinivas [MS87], Hipoteza 5.2 zachodzi dla rozmaitości z trywialną (lub numerycznie trywialną) wiązką kanoniczną. Dowód opiera się na pokazaniu wpierw, że po przejściu do skończonego etalnego nakrycia wiązka styczna również jest trywialna. Istotnie, injektywne odwzorowanie ξ zdefiniowane w §5.1

$$\xi \colon F_X^* \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$$

musi być izomorfizmem, ponieważ jego wyznacznik jest niezerowym endomorfizmem $\mathcal{O}_X$. Na mocy twierdzenia Lange–Stuhlera [LS77] istnieje skończone etalne nakrycie $f\colon Y \to X$ dla którego $f^*\Omega^1_{X/k} \simeq \Omega^1_{Y/k}$ jest wiązką trywialną.

W tym momencie można zastosować wariant teorii Serre'a–Tate'a (zob. Uwaga 4.9) i znaleźć podniesienie $\mathcal{Y}$ nad W. Koniec dowodu, najbardziej subtelny, polega na zastosowaniu wyników Yau w kontekście hipotezy Calabiego do rozmaitości zespolonej $Y_{\mathbf{C}}$ (wybieramy w tym celu zanurzenie $W \hookrightarrow \mathbf{C}$). Uzyskana w ten sposób informacja na temat grupy podstawowej Y pozwala udowodnić, że po przejściu do kolejnego nakrycia etalnego morfizm Albanese jest izomorfizmem.

Jednym z głównych wyników pracy [Hab3] jest „logarytmiczny” wariant powyższego twierdzenia. Jeżeli D jest dywizorem o normalnych przecięciach na gładkiej rozmaitości X nad k, zaś $\widetilde{X}$ jest podniesieniem X nad $W_2(k)$, wtedy przez *podniesienie* D do $\widetilde{X}$ rozumiemy dywizor Cartiera $\widetilde{D} \subseteq \widetilde{X}$ spełniający $\widetilde{D} \cap X = D$, o relatywnie normalnych przecięciach.[7] Powiemy, że podniesienie Frobeniusa $\widetilde{F}$ na $\widetilde{X}$ jest *zgodne* z podniesieniem $\widetilde{D}$ dywizora D jeżeli zachodzi równość dywizorów Cartiera

$$\widetilde{F}^*(\widetilde{D}) = p\widetilde{D}.$$

W tym przypadku powiemy, że para (X,D) jest *F-podnoszalna*, zaś trójkę $(\widetilde{X}, \widetilde{D}, \widetilde{F})$ nazwiemy *F-podniesieniem* pary (X,D).

Twierdzenie 5.6 ([Hab3, Theorem 5.1.1])**.** *Niech X będzie gładką i rzutową rozmaitością nad ciałem algebraicznie domkniętym k charakterystyki $p > 0$, i niech D będzie dywizorem o normalnych przecięciach na X. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) para (X,D) jest F-podnoszalna a wiązka $\omega_X(D)$ jest numerycznie trywialna,

(ii) X jest F-split a wiązka $\Omega^1_X(\log D)$ trywializuje się na skończonym etalnym nakryciu,

(iii) istnieje skończone nakrycie etalne $f\colon Y \to X$ którego morfizm Albanese $a\colon Y \to A$ jest torycznym rozwłóknieniem nad zwyczajną rozmaitością abelową o torycznym brzegu $f^{-1}(D)$.

Dowód powyższego twierdzenia jest równie zawiły co dowód [MS87] i przebiega w podobny sposób, z istotnymi różnicami. Podobnie jak u Mehty i Srinivasa, podnosimy trójkę (X,D,F) do charakterystyki zero. Tam jednak nie możemy skorzystać z wyników Yau dot. hipotezy Calabi jeżeli $D \neq 0$. Zamiast tego, korzystamy z niedawnych wyników [GKP16], [NZ10] na temat

[7] Uwaga: warunek ten wyklucza „częściowe wygładzenia” dywizorów, np. dla $X = \mathbf{A}^2_k$, $\widetilde{X} = \mathbf{A}^2_{W_2(k)}$ oraz $D = V(x_1x_2)$, dywizor $\widetilde{D} = V(x_1x_2 - p)$ *nie* jest podniesieniem D do $\widetilde{X}$, w odróżnieniu od $V(x_1x_2) \subseteq \widetilde{X}$.

rozmaitości zespolonych ze spolaryzowanym endomorfizmem: grupa podstawowa takiej rozmaitości jest wirtualnie abelowa.

W ekstremalnym (docelowo: torycznym) przypadku, gdy $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, korzystamy z następującego argumentu: gdy $\Omega^1_X(\log D)$ jest wiązką trywialną (co w kontekście dowodu mozna założyć), wówczas

$$H^1(X, \underline{\mathrm{End}}(\Omega^1_X(\log D)) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)^{(\dim X)^2} = 0.$$

Grupa ta parametryzuje deformacje pierwszego rzędu wiązki $\Omega^1_X(\log D)$, dlatego podniesienie $(X_{\mathbf{C}}, D_{\mathbf{C}}, F_{\mathbf{C}})$ do charakterystyki zero również będzie miało trywialną logarytmiczną wiązkę kostyczną oraz $H^1(X_{\mathbf{C}}, \mathcal{O}_{X_{\mathbf{C}}}) = 0$. Na mocy twierdzenia Winkelmanna [Win04], para $(X_{\mathbf{C}}, D_{\mathbf{C}})$ jest toryczna. W końcu dowodu korzystamy z „globalnej sztywności par torycznych” (omówionej poniżej w §5.5) by wydedukować, że para (X, D) również jest toryczna.

5.4. Inne przypadki hipotezy

Pracy [Hab3] towarzyszy praca [AWZ20], która jako dotąd nieopublikowana nie wchodzi w skład osiągnięcia habilitacyjnego. W rzeczywistości obie prace tworzyły jeden preprint, który został podzielony w trakcie procesu publikacyjnego. Jako że tworzą one pewną spójną całość, omówmy pokrótce wyniki [AWZ20].

5.4.1. **F-podnoszalność powierzchni.** Pierwszy wynik implikuje prawdziwość Hipotezy 5.2 w wymiarze ≤ 2.

Twierdzenie 5.7. *Niech X będzie gładką i rzutową powierzchnią nad algebraicznie domkniętym ciałem k charakterystyki $p > 0$. Wówczas X jest F-podnoszalna wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:*

- *(i) X jest zwyczajną powierzchnią abelową;*
- *(ii) X jest powierzchnią hipereliptyczną która jest ilorazem iloczynu dwu zwyczajnych krzywych eliptycznych;*
- *(iii) X jest powierzchnią prostokreślną $\mathbf{P}_C(E)$ dla znormalizowanej wiązki wektorowej E rangi 2 na zwyczajnej krzywej eliptycznej C która nie jest nietrywialnym rozszerzeniem $\mathcal{O}_C$ przez $\mathcal{O}_C$;*
- *(iv) X jest powierzchnią toryczną.*

W przypadku powierzchni minimalnych, podobne (choć niestety nie do końca poprawne – [AWZ20, Remark 6.10]) wyniki zawarte są w pracy [Xin16].

5.4.2. **F-podnoszalność 3-rozmaitości Fano.** Drugi wynik dotyczy 3-rozmaitości Fano, stwierdzając prawdziwość Hipotezy 5.2 w tym przypadku. Opiera się on jednak na następującym założeniu, którego prawdziwość wynika z rezultatów [SB97]. Umieszczamy je jednak poniżej jako założenie, ponieważ dowody [SB97] są dla nas nie do końca zrozumiałe (zob. [AWZ20, Remark A.2]):

$$\text{Istnieje } m > 0 \text{ takie, że dla każdej 3-rozmaitości Fano } X \text{ w dowolnej charakterystyce dywizor } -mK_X \text{ nie ma punktów bazowych.} \tag{5.1}$$

Twierdzenie 5.8. *Załóżmy prawdziwość* (5.1)*. Wówczas istnieje p_0 takie, że dla $p > p_0$ każda F-podnoszalna 3-rozmaitość Fano w charakterystyce p jest toryczna.*

Dowód tego twierdzenia korzysta w istotny sposób z klasyfikacji Moriego–Mukai [Sha99], oraz z prawie wszystkich rozwiniętych przez nas technik dot. rozmaitości F-podnoszalnych.

5.5. Wnioski

Na koniec omówimy kilka rezultatów i problemów, które nie dotyczą bezpośrednio F-podnoszalności, a jednak są związane z Hipotezą 5.2.

5.5.1. **Hipoteza Occhetty i Wiśniewskiego.** Rozważmy następujący rodzaj problemu: mając daną zespoloną rozmaitość rzutową Z, wyznaczyć z dokładnością do izomorfizmu wszystkie gładkie rzutowe rozmaitości X dla których istnieje surjekcja $\varphi\colon Z \to X$. W przypadku $Z = \mathbf{P}^n$, korzystając z teorii Mori Lazarsfeld [Laz84] pokazał, że $X \simeq \mathbf{P}^n$ (lub X jest punktem). Innym ciekawym przypadkiem jest, gdy Z jest rozmaitoscią abelową; wówczas X posiada nakrycie etalne które jest produktem rozmaitości abelowej i przestrzeni rzutowych [Deb89, HM01, DHP08]. W innym kierunku, Occhetta i Wiśniewski [OW02] pokazali, że jeżeli Z jest rozmaitością toryczną oraz X ma liczbę Picarda jeden, wówczas $X \simeq \mathbf{P}^n$. W tej samej pracy, postawili następującą, otwartą do dzisiaj hipotezę.

Hipoteza 5.9. *Niech X będzie gładką i rzutową rozmaitością zespoloną. Jeżeli istnieje surjekcja $\varphi\colon Z \to X$ gdzie Z jest właściwą rozmaitością toryczną, wówczas X również jest rozmaitością toryczną.*

Jedną z motywacji prac [Hab3] oraz [AWZ20] była próba potwierdzenia nowych przypadków powyższej hipotezy za pomocą redukcji do dodatniej charakterystyki. W istocie, jednym z ciekawszych wyników [Hab3] jest obserwacja, że nasza Hipoteza 5.2 implikuje hipotezę Occhetty–Wiśniewskiego.

Twierdzenie 5.10 ([Hab3, Theorem 3])**.** *Prawdziwość Hipotezy 5.2 dla rozmaitości jednospójnych w charakterystyce $p \gg 0$ implikuje prawdziwość Hipotezy 5.9 w charakterystyce zero.*

Związek ten korzysta z jednej strony z techniki spychania F-podnoszalności, z drugiej z wyników na temat toryczności włókien w arytmetycznych rodzinach rozmaitości. Mianowicie, mając dane $f\colon Z \to X$ nad $\mathbf{C}$ gdzie Z jest toryczne, korzystając z obserwacji w [OW02] możemy założyć, że morfizm f jest skończony. Znajdujemy model arytmetyczny $f\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ nad schematem S skończonego typu nad $\mathbf{Z}$ i patrzymy na włókno nad punktem domkniętym $\mathfrak{p} \in S$ którego charakterystyka jest względnie pierwsza ze stopniem f. Ponieważ $\mathcal{Z}_\mathfrak{p}$ jest toryczne, jest F-podnoszalne, a zatem na mocy Twierdzenia 5.4 $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ jest F-podnoszalne. Zgodnie z Hipotezą 5.2, rozmaitość $\mathcal{X}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ jest wtedy toryczna. Zatem $\mathcal{X}/S$ ma prawie wszystkie włókna geometryczne będące rozmaitościami torycznymi. Korzystając z wersji twierdzenia Jaczewskiego [Jac94] w wersji Kędzierskiego–Wiśniewskiego [KW15] oraz pewnych wyników pomocniczych, pokazujemy, że wówczas geometryczne włókno ogólne X jest toryczne.

Z zaprezentowanej techniki wynika, że w sytuacji Hipotezy 5.9 rozmaitość X spełnia znikanie Botta (Stwierdzenie 5.3). W szczególności, jeżeli X jest rozmaitością Fano, wówczas musi ona być sztywna. Jest ciekawym pytaniem, jak daleko od bycia toryczną jest rozmaitość jednospójna spełniająca znikanie Botta. Jak niedługo po ukazaniu się pracy [Hab3] pokazał Totaro [Tot20], istnieją dość proste rozmaitości (rozdmuchanie $\mathbf{P}^2$ w czterech punktach w ogólnym położeniu oraz niektóre powierzchnie K3) które niebędąc torycznymi spełniają znikanie Botta.

Z rezultatów prac [Hab3] oraz [AWZ20] na temat Hipotezy 5.9 wynika prawdziwość hipotezy Occhetty–Wiśniewskiego w przypadku, gdy $\dim X \leq 2$, gdy X jest trójwymiarową rozmaitością Fano, lub gdy X jest rozmaitością jednorodną.

5.5.2. **Pary z trywialną logarytmiczną wiązką styczną.** Wiązka styczna rozmaitości abelowej jest trywialna (dzięki działaniu poprzez przesunięcia). Nad $\mathbf{C}$, twierdzenie odwrotne również jest prawdziwe: rzutowa i gładka rozmaitość z trywialną wiązką styczną jest rozmaitością abelową. W dodatniej charakterystyce nie jest to prawda, jednak Mehta i Srinivas [MS87] pokazali, że *zwyczajne* (lub F-split) rozmaitości z trywialną wiązką styczną mają skończone nakrycie etalne będące rozmaitością abelową.

Jeżeli X jest gładką rozmaitością a $D \subseteq X$ dywizorem o normalnych przecięciach, wówczas mamy podsnop wiązki stycznej $T_X(-\log D) \subseteq T_X$ składający się z różniczkowań zachowujących ideał dywizora D, lub równoważnie z pól wektorowych stycznych do D w każdym punkcie D. Jest on również lokalnie wolny wymiaru $\dim(X)$, i jest nazywany *logarytmiczną wiązką styczną* pary (X,D).

Jeżeli X jest gładką rozmaitością toryczną a $D \subseteq X$ jest jej torycznym brzegiem (dopełnieniem otwartej orbity działania torusa), wówczas logarytmiczna wiązka styczna $T_X(-\log D)$ jest trywialna: jeżeli $m \in M$ jest elementem kraty charakterów torusa, rozumianym jako funkcja wymierna na X, wówczas $d\log(m) = m^{-1}dm$ jest przekrojem wiązki dualnej $\Omega^1_X(\log D)$. Zadaje to izomorfizm snopów na X

$$T_X(-\log D) \simeq M^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X.$$

Łącząc przypadek rozmaitości abelowej oraz rozmaitości torycznej, rozważmy rozmaitość semiabelową A (rozszerzenie torusa i rozmaitości abelowej) działającą w sposób wierny na gładkiej i rzutowej rozmaitości X z gęstą orbitą U. Wówczas $D = X \setminus U$ jest dywizorem o normalnych przecięciach oraz logarytmiczna wiązka styczna $T_X(-\log D)$ jest trywialna. Nad $\mathbf{C}$, twierdzenie odwrotne udowodnił Winkelmann [Win04]. Nad ciałem dodatniej charakterystyki znowu nie jest to prawda, jednak nasze Twierdzenie 5.6 może zostać uznane za częściowe twierdzenie odwrotne, rozszerzające wynik Mehty i Srinivasa na przypadek logarytmiczny.

5.5.3. **Globalna sztywnosc par torycznych.** Rozmaitość gładką i rzutową X nazywamy *sztywną* jeżeli nie posiada ona nietrywialnych deformacji, lub równoważnie gdy $H^1(X,T_X) = 0$. Powiemy, że X jest *globalnie sztywna* jeżeli nie posiada ona również nietrywialnych degeneracji: jeżeli S jest spójnym k-schematem a $\mathcal{X}$ jest gładkim i rzutowym S-schematem takim, że istnieje punkt geometryczny $\mathrm{Spec}(L) \to S$ taki, że $\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spec}(L) \simeq X \otimes_k L$, wówczas $\mathcal{X}$ oraz $X \times S$ są izomorficznie etalnie lokalnie na S, i w szczególności powyższy izomorfizm zachodzi dla każdego punktu geometrycznego S. Jednym z większych osiągnięć teorii krzywych wymiernych minimalnego stopnia [HM04] jest pokazanie, że przestrzenie rzutowe są globalnie sztywne.

Powyższe definicje mają sens dla par (X,D) gdzie X jest jak wyżej a D jest dywizorem o normalnych przecięciach na X. Zauważmy teraz, że jeżeli (X,D) jest *parą toryczną*, tj. X jest rozmaitością toryczną a $D = X \setminus T$ jej torycznym brzegiem, wówczas jak widzieliśmy wcześniej logarytmiczna wiązka kostyczna $\Omega^1_X(\log D)$ jest trywialna. Ponieważ zaś $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, wnioskujemy, że każda para toryczna (X,D) jest sztywna.

Skutkiem ubocznym naszych badań nad F-podnoszalnością i Hipotezą 5.2 było udowodnienie, że pary toryczne są globalnie sztywne.

Twierdzenie 5.11 ([Hab3, Proposition 4.3.1]). *Niech S będzie niepustym i spójnym schematem noetherowskim, niech $f\colon X \to S$ będzie morfizmem gładkim i rzutowym, i niech $D \subseteq X$ będzie dywizorem o relatywnie normalnych przecięciach nad S. Następujące warunki są wtedy równoważne:*

(i) Morfizm f ma strukturę torycznego rozwłóknienia z torycznym brzegiem D.

(ii) Istnieje gładki wachlarz Σ, pokrycie etalne $S' \to S$, oraz izomorfizm

$$(X,D) \times_S S' \simeq (X(\Sigma), D(\Sigma)) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})} S'.$$

(iii) Istnieje punkt geometryczny $\bar{s}$ schematu S oraz gładki wachlarz Σ taki, że

$$(X_{\bar{s}}, D_{\bar{s}}) \simeq (X(\Sigma), D(\Sigma)) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})} \bar{s}.$$

6. Rozmaitości $K(\pi,1)$ i dzikie rozgałęzienie [Hab4]

Etalna teoria homotopii (w sensie Artina i Mazura [AM69]) schematów w dodatniej charakterystyce jest słabo zrozumiana. Jak wspomnieliśmy we Wstępie, już sama etalna grupa podstawowa prostej afinicznej nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p > 0$ jest ogromna. Główny wynik pracy [Hab4] pokazuje jednak, że w pewnym sensie etalna grupa podstawowa kontroluje typy homotopii w dodatniej charakterystyce.

W topologii algebraicznej, spójną przestrzeń topologiczną (spełniającą zwykłe techniczne założenia) X nazywamy *przestrzenią $K(\pi,1)$* jeżeli jej nakrycie uniwersalne $\widetilde{X}$ jest słabo ściągalne. Równoważnie, $\pi_q(X) = 0$ dla $q \geq 2$. Typ homotopii takiej przestrzeni jest jednoznacznie wyznaczony przez jej grupę podstawową $\pi_1(X)$, mianowicie kanoniczny morfizm do jej przestrzeni klasyfikującej

$$\rho\colon X \longrightarrow B\pi_1(X)$$

jest słabą równoważnością. Kohomologie przestrzeni X (o współczynnikach w dowolnym systemie lokalnym) są zatem utożsamione z kohomologiami grupy podstawowej $\pi_1(X)$.

Pojęcie przestrzeni $K(\pi,1)$ ma naturalny odpowiednik w topologii etalnej. Powiemy, że spójny schemat X (kwazi-zwarty i kwazi-separowalny) jest *schematem* $K(\pi,1)$ jeżeli dla dowolnego konstruowalnego lokalnie stałego etalnego snopa $\mathcal{F}$ na X, naturalny morfizm

$$\rho^*\colon H^q(\pi_1(X,\bar{x}),\mathcal{F}_{\bar{x}}) \longrightarrow H^q_{\text{ét}}(X,\mathcal{F})$$

jest izomorfizmem dla $q \geq 0$. Jeżeli X spełnia dodatkowe warunki, powyższa definicja jest równoważna ze znikaniem etalnych wyższych grup homotopii $\pi_q^{\text{ét}}(X)$ ($q \geq 2$). Schematy $K(\pi,1)$ zostały wynalezione przez Artina [SGA73, Exp. XI] w kontekście dowodu wariantu twierdzenia porównawczego (1.1). Pokazał on, że każdy gładki schemat nad $\mathbf{C}$ posiada otwarte pokrycie afinicznymi schematami $K(\pi,1)$, tzw. otoczeniami Artina, dla których twierdzenie było proste do udowodnienia korzystając ze wcześniejszego twierdzenia porównawczego dla etalnej grupy podstawowej w [SGA03].

Przez długi czas, istnienie otoczeń Artina w charakterystyce $p > 0$ było nieznane, poza pewnym specjalnym wariantem [Fri73]. Okazało się jednak, że otoczeń $K(\pi,1)$ w dodatniej charakterystyce jest dużo więcej. Głównym wynikiem pracy [Hab4] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Każdy spójny schemat afiniczny nad* $\mathbf{F}_p$ *jest schematem* $K(\pi,1)$.

W powyższym twierdzeniu brak jakichkolwiek założeń o skończoności. W istocie twierdzenie łatwo zredukować do przypadku spójnego schematu afinicznego skończonego typu nad $\mathbf{F}_p$. Przed tym twierdzeniem nieznane były jakiekolwiek przykłady afinicznych rozmaitości $K(\pi,1)$ w dodatniej charakterystyce poza krzywymi — nie było nawet wiadomo, czy płaszczyzna afiniczna jest przestrzenią $K(\pi,1)$.

Dowód Twierdzenia 6.1 opiera się z jednej strony na redukcji do przypadku przestrzeni afinicznej nad $\mathbf{F}_p$, z drugiej na niedawnych postępach w wyższej teorii rozgałęzienia poczynionych przez Alexandra Beilinsona [Bei16] i Takeshiego Saito [Sai17a].

6.1. Redukcja do przypadku przestrzeni afinicznej

Niech $X = \operatorname{Spec}(A)$ będzie spójnym afinicznym schematem nad $\mathbf{F}_p$. Poniżej naszkicujemy, w jaki sposób prawdziwość Twierdzenia 6.1 dla przestrzeni afinicznych $\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$ dla wszystkich $n \geq 0$ implikuje jego prawdziwość w ogólności.

Algebra A jest sumą wstępującą (granicą induktywną) swoich skończenie generowanych podalgebr: $A = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Zatem $X = \varprojlim_{\alpha\in I} X_\alpha$ jest granicą odwrotną schematów afinicznych skończonego typu nad $\mathbf{F}_p$. Z twierdzeń o kompatybilności kohomologii z granicami prostymi dla toposów koherentnych [SGA72] wynika wtedy łatwo, że jeżeli wszystkie X_α są schematami $K(\pi,1)$, to ich granica X również jest schematem $K(\pi,1)$. Możemy zatem założyć, że X jest skończonego typu nad $\mathbf{F}_p$.

Wybierzmy zanurzenie domknięte $i\colon X \hookrightarrow \mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$. Niech Y będzie henselizacją $\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$ wzdłuż X. Z definicji, Y jest granicą odwrotną wszystkich afinicznych etalnych otoczeń U schematu X

wewnątrz $\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\text{etalne}"] \\ X \arrow[ur] \arrow[r, "i"'] & \mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}. \end{tikzcd}$$

Z drugiej strony, dzięki twierdzeniu Gabbera [Gab94] („afinicznego analogu" twierdzenia o właściwej zmianie bazy [SGA73, Exp. XII]), etalny typ homotopii Y jest równoważny etalnemu typowi homotopii X, wobec czego X jest $K(\pi,1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest $K(\pi,1)$. Można wobec tego założyć w naszym twierdzeniu, że X jest wyposażony w etalny morfizm $X \to \mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$. Istotnie, jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich afinicznych schematów etalnych nad $\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$, to jest one prawdziwe dla wszystkich U w granicy powyżej, zatem (znowu dzięki możności przejścia do granicy) prawdziwe dla Y, zatem (dzięki twierdzeniu Gabbera) także dla X.

Niech $f\colon X \to \mathbf{A}^n_k$ będzie morfizmem etalnym. Ostatni krok polega na zastosowaniu następującego tricku: do współrzędnych morfizmu f dodajemy wybrane w odpowiedni sposób p-te potęgi elementów $h_i \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$:

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \quad \rightsquigarrow \quad g = (f_1 + h_1^p, \ldots, f_n + h_n^p).$$

Ponieważ $dg_i = df_i$, morfizm g również jest etalny. Jednak dla dobrze wybranych h_i, morfizm g będzie również skończony, czyniąc z X skończone nakrycie przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}$. (Podobny trick został wcześniej zastosowany przez Kedlayę w pracy [Ked02].) Jak łatwo zauważyć, jeżeli $X \to X'$ jest skończonym morfizmem etalnym pomiędzy spójnymi schematami, wtedy X jest $K(\pi,1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy X' jest $K(\pi,1)$. Zatem z faktu, że $\mathbf{A}^n_k$ jest $K(\pi,1)$ wynika to samo dla X.

6.2. Przypadek przestrzeni afinicznej, redukcja do twierdzenia Bertiniego

Niech k będzie dowolnym ciałem charakterystyki $p > 0$. Dowód Twierdzenia 6.1 w przypadku $X = \mathbf{A}^n_k$ przebiega przez indukcję ze względu na $n \geq 0$. Korzysta on z następującego kryterium: schemat X jest $K(\pi,1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego snopa konstruowalnego lokalnie stałego $\mathcal{F}$ na X i dowolnej klasy w kohomologiach $\zeta \in H^q_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$ z $q \geq 1$ istnieje skończone etalne nakrycie

$$f\colon Y \longrightarrow X$$

takie, że $f^*(\zeta) = 0 \in H^q_{\text{ét}}(Y, f^*\mathcal{F})$. Dla $q = 1$ to jest zawsze prawda, na mocy etalnego analogu twierdzenia Hurewicza $\operatorname{Hom}(\pi_1(X), G) \simeq H^1(X, G)$. Przypadek, gdy $\mathcal{F}$ jest p-torsyjny jest łatwy do rozpatrzenia za pomocą teorii Artina–Schreiera. Pozostałe przypadki można zredukować do sytuacji gdy $\mathcal{F}$ jest snopem $\mathbf{F}_\ell$-przestrzeni liniowych dla pewnej liczby pierwszej $\ell \neq p$.

Dla kroku indukcyjnego, rozważmy rzutowanie na pierwsze n współrzędnych

$$\pi\colon \mathbf{A}^{n+1}_k \longrightarrow \mathbf{A}^n_k.$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie lokalnie stałym snopem konstruowalnym $\mathbf{F}_\ell$-przestrzeni liniowych na $\mathbf{A}^{n+1}_k$ i niech $\zeta \in H^q_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$ będzie klasą w kohomologiach (z $q \geq 2$). Aby skorzystać z założenia indukcyjnego, piszemy ciąg spektralny Leraya

$$E_2^{ij} = H^i_{\text{ét}}(\mathbf{A}^n_k, R^j\pi_*\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad H^{i+j}_{\text{ét}}(\mathbf{A}^{n+1}_k, \mathcal{F}). \tag{6.1}$$

Załóżmy, że wyższe obrazy proste $R^j\pi_*\mathcal{F}$ spełniają następujące dwa warunki:

(i) snopy $R^j\pi_*\mathcal{F}$ są lokalnie stałe dla $j = 0, 1$,

(ii) snopy $R^j\pi_*\mathcal{F}$ są zerowe dla $j \geq 2$.

(Drugi warunek zachodzi jeżeli $R^j\pi_*\mathcal{F}$ są przemienne ze zmianą bazy.) Wówczas ciąg spektralny (6.1) ma postać długiego ciągu dokładnego

$$\cdots \longrightarrow H^q_{\text{ét}}(\mathbf{A}^n_k, \pi_*\mathcal{F}) \longrightarrow H^q_{\text{ét}}(\mathbf{A}^{n+1}_k, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{q-1}_{\text{ét}}(\mathbf{A}^n_k, R^1\pi_*\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

z którego stosunkowo łatwo wyprodukować szukane skończone etalne nakrycie $Y \to \mathbf{A}^{n+1}_k$ „zabijające” klasę ζ dzięki założeniu indukcyjnemu.

Główną trudnością w twierdzeniu jest fakt, że warunki (i)–(ii) nie muszą być spełnione. Co więcej, bywa i tak, że nie są one spełnione dla żadnego liniowego rzutowania $\mathbf{A}^{n+1}_k \to \mathbf{A}^n_k$. Ma to związek z dzikim rozgałęzieniem snopa $\mathcal{F}$ w nieskończoności. Jednym z pomysłów jest obserwacja, że możemy wybrać stosowne rzutowanie $\varpi\colon \mathbf{A}^{n+1}_k \to \mathbf{A}^n_k$ (składając nasze π z być może nieliniowym automorfizmem dziedziny) już po wybraniu snopa $\mathcal{F}$, na podstawie informacji o jego rozgałęzieniu w nieskończoności.

Pomysł ten zostaje urzeczywistniony w następującym twierdzeniu, które można nazwać *twierdzeniem Bertiniego dla systemów lokalnych*.

Twierdzenie 6.2. *Niech k będzie nieskończonym ciałem charakterystyki $p > 0$ i niech $n \geq 0$. Niech $\ell \neq p$ będzie liczbą pierwszą i niech $\mathcal{F}$ będzie lokalnie stałym snopem konstruowalnym przestrzeni liniowych nad $\mathbf{F}_\ell$ na $\mathbf{A}^{n+1}_k$. Oznaczmy przez*

$$\pi\colon \mathbf{A}^{n+1}_k \longrightarrow \mathbf{A}^n_k$$

rzutowanie na pierwsze n współrzędnych. Wtedy istnieje automorfizm φ przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}^{n+1}_k$ taki, że wyższe obrazy proste

$$R^q(\pi \circ \varphi)_*\mathcal{F}$$

są lokalnie stałe i przemienne ze zmianą bazy dla każdego $q \geq 0$.

6.3. Teoria rozgałęzienia, dowód twierdzenia Bertiniego

Teoria rozgałęzienia (ramifikacji) zajmuje się opisem lokalnej postaci morfizmów pomiędzy krzywymi $(X', x') \to (X, x)$, lub w algebraicznym języku, rozszerzeń henselowskich pierścieni dyskretnej waluacji (DVR) $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}'$. Nad ciałem liczb zespolonych $\mathbf{C}$, każdy niestały morfizm pomiędzy krzywymi etalnie lokalnie jest izomorficzny z podnoszeniem do e-tej potęgi w otoczeniu zera

$$z \mapsto z^e\colon \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}.$$

Morfizm tego typu tj. spełniający warunek, że pewna potęga parametru lokalnego $\mathcal{O}'$ jest parametrem lokalnym $\mathcal{O}$, nazwiemy *umiarkowanie rozgałęzionym*. W dodatniej charakterystyce sytuacja jest o wiele bardziej skomplikowana. Po pierwsze, istnieją morfizmy nierozdzielcze (Frobenius), których po prostu nie rozpatrujemy, tj. zakładamy, że rozszerzenie ciał ułamków $K \subseteq K'$ jest rozdzielcze. Po drugie, istnieją rozszerzenia $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ takie, że rząd e ilorazu grup waluacji $\Gamma_{\mathcal{O}'}/\Gamma_{\mathcal{O}}$, zwany *indeksem rozgałęzienia*, jest podzielny przez p. Takie rozszerzenia nazwiemy *dziko rozgałęzionymi*, są to dokładnie te, które nie są umiarkowanie rozgałęzione. W przypadku gdy $K \subseteq K'$ jest rozszerzeniem Galois i *rozszerzenie ciał rezidualnych $k \subseteq k'$ jest rozdzielcze*, dzikie rozgałęzienie rozszerzenia $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ jest mierzone *filtracją ramifikacyjną* $G \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$ na grupie Galois $G = \mathrm{Gal}(K'/K)$ zdefiniowaną jako

$$G_i = \{\sigma \in G : \sigma(x) - x \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}'}^{i+1}\}$$

gdzie x jest parametrem lokalnym $\mathcal{O}'$, tj. generatorem ideału maksymalnego $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}'}$. Zatem K'/K jest umiarkowanie rozgałęzione wtedy i tylko wtedy, gdy $G = G_1$.

Teoria rozgałęzienia stosuje się również do reprezentacji Galois. Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad $\mathbf{F}_\ell$ wyposażoną w ciągłe działaniem grupy Galois $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, gdzie ℓ jest liczbą pierwszą odwracalną w ciele rezidualnym k. Przypuśćmy, że istnieje skończone rozszerzenie Galois $K \subseteq K'(\subseteq \overline{K})$ takie, że podgrupa $\Gamma_{K'} \subseteq \Gamma_K$ działa trywialnie na V i takie, że rozszerzenie ciał rezidualnych $k \subseteq k'$ jest rozdzielcze. Wtedy działanie opuszcza się do działania grupy skończonej $G = \mathrm{Gal}(K'/K)$ na V. Dzikie rozgałęzienie V mierzymy wtedy tzw. *konduktorem Swana*, który jest liczbą całkowitą nieujemną zdefiniowaną wzorem

$$\mathrm{Sw}(V) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[G_0 : G_i]} \dim_{\mathbf{F}_\ell}(V/V^{G_i}).$$

Mówiąc skrótowo, związek dzikiego rozgałęzienia z dowodem Twierdzenia 6.2 jest następujący. Niech $\mathcal{F}$ oraz $\pi\colon \mathbf{A}_k^{n+1} \to \mathbf{A}_k^n$ będą jak w twierdzeniu, niech $\bar{y}$ będzie punktem geometrycznym $\mathbf{A}_k^n$, i niech $\mathcal{F}_{\bar{y}}$ będzie przeciwobrazem snopa $\mathcal{F}$ na włóknie geometrycznym $\pi^{-1}(\bar{y}) \simeq \mathbf{A}^1_{k(\bar{y})}$. Wzór Grothendiecka–Ogga–Szafarewicza [SGA77, Exp. 10, (7.2)] daje wtedy równość

$$\chi(\mathcal{F}_{\bar{y}}) = \mathrm{rank}(\mathcal{F}_{\bar{y}}) - \mathrm{Sw}_\infty(\mathcal{F}_{\bar{y}}).$$

Jeżeli pokażemy, że konduktor Swana $\mathrm{Sw}_\infty(\mathcal{F}_{\bar{y}})$ nie zależy od wyboru $\bar{y}$, wówczas na mocy twierdzenia Deligne'a–Laumona [Lau81] wyższe obrazy proste $R^q\pi_*\mathcal{F}$ będą lokalnie stałe i przemienne ze zmianą bazy dla $q \geq 0$.

Dla dowodu Twierdzenia 6.2 potrzebna jest zatem kontrola nad konduktorem Swana w nieskończoności obcięcia danego systemu lokalnego $\mathcal{F}$ do krzywej w $\mathbf{A}_k^{n+1}$ izomorficznej z $\mathbf{A}_k^1$. Kontroli takiej dostarcza wyższa teoria rozgałęzienia, a konkretnie *cykl charakterystyczny* snopa konstruowalnego zdefiniowany przez T. Saito [Sai17b, Sai17a].

Niech X będzie rozmaitością gładką nad k i niech

$$T^*X = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_X} \mathrm{Sym}\, T_X$$

będzie jej wiązką kostyczną. Dla dowolnego konstruowalnego etalnego $\mathbf{F}_\ell$-snopa $\mathcal{F}$ istnieje wtedy cykl algebraiczny $\mathrm{CC}(\mathcal{F})$ na T^*X, zwany *cyklem charakterystycznym* snopa $\mathcal{F}$. Jest on kombinacją liniową o całkowitych współczynnikach domkniętych nierozkładalnych podzbiorów w

T^*X kowymiaru $\dim(X)$ zachowywanych przez działanie $\mathbf{G}_m$ przez homotetie. Kontroluje on osobliwości $\mathcal{F}$ po obcięciu do krzywych $C \subseteq X$; mianowicie, jeżeli krzywa C jest odpowiednio transwersalna do cyklu charakterystycznego $\mathrm{CC}(\mathcal{F})$ w otoczeniu punktu $x \in X$, wówczas można w ten sposób obliczyć konduktor Swana $\mathrm{Sw}_x(\mathcal{F}|_C)$.

Dowód Twierdzenia 6.2 opiera się na analizie cyklu charakterystycznego snopa $j_!\mathcal{F}$ na przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}_k^{n+1}$, gdzie $j\colon \mathbf{A}_k^{n+1} \hookrightarrow \mathbf{P}_k^{n+1}$ jest otwartym włożeniem. Konkretnie, trudność polega na znalezieniu odpowiedniego kwadratowego automorfizmu φ przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}_k^{n+1}$ o tej własności, że włókna złożenia $\pi \circ \varphi\colon \mathbf{A}_k^{n+1} \to \mathbf{A}_k^n$ (a dokładniej, ich domknięcia w $\mathbf{P}_k^{n+1}$) są odpowiednio transwersalne do cyklu charakterystycznego $\mathrm{CC}(j_!\mathcal{F})$. Jako że argument ten jest nieco delikatny, odsyłamy w tym momencie do pracy [Hab4].

6.4. Zastosowania

Pierwszy wniosek z Twierdzenia 6.1 dotyczy etalnych typów homotopii rozmaitości nieafinicznych. Jako że każdy schemat ma otwarte pokrycie przez schematy afiniczne, każdy lokalnie spójny schemat X nad $\mathbf{F}_p$ ma otwarte pokrycie schematami $K(\pi,1)$. Dodatkowo, jeżeli X jest separowalny, wtedy przecięcie dwóch otwartych podzbiorów afinicznych w X jest podzbiorem afinicznym. W ten sposób możemy opisać etalny typ homotopii X jako prostego kształtu kogranicę homotopijną przestrzeni klasyfikujących grup proskończonych. Jeżeli X jest gładki, spójny, kwazi-rzutowy wymiaru n nad k, wówczas opis ten można uprościć. Mianowicie, istnieje otwarte pokrycie afiniczne $X = U_0 \cup \ldots \cup U_n$ takie, że każde skończone przecięcie $U_I = \bigcap_{i\in I} U_i$ ($\emptyset \neq I \subseteq \{0,\ldots,n\}$) zbiorów U_i jest spójnym skończonym nakryciem etalnym przestrzeni afinicznej $\mathbf{A}_k^n$. Wobec tego etalny typ homotopii X jest homotopijną kogranicą przestrzeni BG_I ($G_I = \pi_1^{\text{ét}}(U_I)$) indeksowaną niepustymi podzbiorami $I \subseteq \{0,\ldots,n\}$, gdzie dla każdego I grupa G_I jest podgrupą skończonego indeksu w jednej i tej samej grupie $\pi_1(\mathbf{A}_k^n)$.

Zatem ciąg grup proskończonych $\pi_1(\mathbf{A}_k^n)$ zawiera w pewnym sensie informacje na temat wszystkich typów homotopii w dodatniej charakterystyce. Co ciekawe, nie było wcześniej wiadomo, że $\pi_1(\mathbf{A}_k^n)$ i $\pi_1(\mathbf{A}_k^m)$ nie są izomorficzne dla $m \neq n$. Wynika to jednak stosunkowo łatwo z Twierdzenia 6.1.

Ostatnie, być może najciekawsze zastosowanie dotyczy przestrzeni niearchimedesowych. Jego dowód opiera się na twierdzeniu Gabbera–Fujiwary [Fuj95] opisującym związek etalnej homotopii schematów oraz przestrzeni niearchimedesowych, oraz na teorii przestrzeni perfektoidalnych Scholzego [Sch12, Sch13] (*tilting*).

Twierdzenie 6.3. *Każda noetherowska afinoidalna przestrzeń adyczna nad $\mathbf{Q}_p$ jest przestrzenią $K(\pi,1)$.*

Można w ten sposób otrzymać wariant Twierdzenia 6.1 prawdziwy w mieszanej charakterystyce:

Twierdzenie 6.4. *Niech A będzie noetherowską algebrą nad $\mathbf{Z}_{(p)}$ taką, że para (A,pA) jest henselowska. Wówczas schemat $\mathrm{Spec}(A[1/p])$ jest schematem $K(\pi,1)$.*

To z kolei pozwala uogólnić wyniki z mojej pracy doktorskiej [Ach15] dotyczące kohomologii toposu Faltingsa, usuwając założenia o log gładkości.

7. Typy homotopii Bettiego nad ciałem $\mathbf{C}((t))$ [Hab5]

W ostatniej z prezentowanych prac, wspólnej z Mattią Talpo, skonstruowaliśmy typ homotopii funktorialnie przypisany rozmaitościom algebraicznym i niearchimedesowym nad ciałem szeregów formalnych Laurenta $\mathbf{C}((t))$. Pytanie o istnienie takiego typu homotopii zostało postawione przez Treumanna [Tre17] w kontekście zespolonej topologicznej K-teorii par lustrzanych. Nasze rozwiązanie korzysta w zasadniczy sposób z *geometrii logarytmicznej* oraz ze słabego twierdzenia o faktoryzacji [Wł03, AT19].

Nazwa *typ homotopii Bettiego* jest tradycyjnie stosowana dla typu homotopii przestrzeni X_{top} dla schematu X lokalnie skończonego typu nad $\mathbf{C}$ (w odróżnieniu np. od etalnego typu homotopii). Nasze funktory mają podobne własności, dlatego używamy tej samej nazwy. Główną różnicą pomiędzy $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}((t))$ jest fakt, że w tym drugim przypadku odpowiednie przestrzenie są zdefiniowane jedynie z dokładnością do homotopii.

Właściwym kontekstem dla naszej pracy jest topologia degeneracji. Niech $f\colon X\to S$ będzie właściwym morfizmem rozmaitości nad $\mathbf{C}$, gdzie S jest gładką krzywą, i niech $s\in S$. Załóżmy, że morfizm f jest gładki nad $S^*:=S\setminus\{s\}$, i oznaczmy $Y=f^{-1}(s)$ włókno nad punktem s. Włókno Y może nie być gładkie; w tym przypadku powiemy, że s jest punktem, w którym rodzina $X\to S$ się degeneruje.

Oczywistą przeszkodą do gładkości $X\to S$ wzdłuż Y jest lokalna monodromia. Niech $\Delta\subseteq S_{\text{top}}$ będzie małym dyskiem o środku s, niech $\Delta^*=\Delta\setminus\{s\}$, i niech

$$f^*\colon X_{\text{top}}\times_{S_{\text{top}}}\Delta^*\longrightarrow\Delta^* \tag{7.1}$$

będzie indukowanym odwzorowaniem nad nakłutym dyskiem Δ^*. Odwzorowanie f^* jest wiązką lokalnie trywialną (na mocy twierdzenia Ehresmanna). Jeżeli $\eta\in\Delta^*$ jest punktem bazowym w pobliżu $s\in S$, wtedy grupa podstawowa $\pi_1(\Delta^*,\eta)\simeq\mathbf{Z}$ działa na typie homotopii „włókna pobliskiego" $(X_\eta)_{\text{top}}$. Warunkiem koniecznym dla gładkości f jest, by to działanie było trywialne. Równoważnie, odwzorowanie f^* w kategorii homotopii ma być odwzorowaniem produktowym.

Chcąc lokalną monodromię f w pobliżu włókna $Y=X_s$ badać w sposób algebraiczny, zamieniamy dysk $\Delta\subseteq S_{\text{top}}$ na „infinitezymalny dysk", tj. spektrum uzupełnienia pierścienia lokalnego $\mathcal{O}_{S,s}$

$$\widehat{S}_s=\operatorname{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{S,s}).$$

Wybór parametru lokalnego t w punkcie s indukuje izomorfizm $\widehat{S}_s\simeq\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[\![t]\!])$. Odpowiednikiem nakłutego dysku Δ^* jest wtedy

$$\widehat{S}_s^*=\widehat{S}_s\setminus S=\operatorname{Spec}(\widehat{K}_s),\qquad \widehat{K}_s=\operatorname{Frac}(\widehat{\mathcal{O}}_{S,s})\simeq\mathbf{C}((t)).$$

Jeżeli przez $\mathcal{X}^*$ oznaczymy schemat $X\times_S\widehat{S}_s^*$, dostajemy gładką rozmaitość nad ciałem $\widehat{K}_s$. Podobnie, zamieniając $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{S,s})$ powyżej na spektrum formalne $\operatorname{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}_{S,s})$, i odpowiednio $\operatorname{Spec}(\widehat{K}_s)$ na spektrum afinoidalne $\operatorname{Sp}(\widehat{K}_s)$, dostajemy gładką rozmaitość niearchimedesową

$$(\mathcal{X}^*)^{\text{an}}=(\widehat{X}_s)_{\text{rig}}$$

nad ciałem niearchimedesowym $\widehat{K}_s$.

Główny rezultat [Hab5] można wtedy streścić następująco: odwzorowanie (7.1) można, z dokładnością do homotopii, funktorialnie zrekonstruować mając daną rozmaitość niearchimedesową $(\mathfrak{X}^*)^{\mathrm{an}}$. Zatem geometria niearchimedesowa nad $\widehat{K}_s \simeq \mathbf{C}((t))$ „pamięta” topologię rodziny X/S w otoczeniu s. Mówiąc precyzyjniej, w pracy konstruujemy funktor Ψ_{rig} z kategorii gładkich rozmaitości niearchimedesowych nad $\mathbf{C}((t))$ do kategorii homotopii przestrzeni topologicznych nad okręgiem $\mathbf{S}^1$. Ma on tę własność, że w sytuacji opisanej w poprzednich akapitach mamy homotopijną równoważność

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{top}} \times_{S_{\mathrm{top}}} \Delta^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f^*"'] & \Psi_{\mathrm{rig}}((\mathfrak{X}^*)^{\mathrm{an}}) \arrow[d] \\ \Delta^* \arrow[r, "\sim", "\arg(t)"'] & \mathbf{S}^1. \end{tikzcd}$$

Co istotne, funktor Ψ_{rig} można ewaluować na dowolnej gładkiej rozmaitości niearchimedesowej — nawet dla takiej, która nie pochodzi od rozmaitości algebraicznej lub nie jest zdefiniowana przez szeregi o dodatnim promieniu zbieżności. Otwiera to zupełnie nowe możliwości badania topologii rozmaitości niearchimedesowych nad $\mathbf{C}((t))$. Niektóre rodzące się stąd pytania streścimy pokrótce w §7.3.

Praca [Hab5] miała duży wpływ na rozwój moich zainteresowań naukowych. Dzięki niej poznałem lepiej geometrię niearchimedesową i kontynuowałem badania nad typami homotopii w jej kontekście, co zaowocowało dalszymi pracami [Ach20, ALY21a, ALY21b].

7.1. Funktor realizacji Bettiego

Niech K będzie ciałem zupełnym względem dyskretnej waluacji, którego ciało rezidualne k zostało wyposażone w zanurzenie

$$\iota \colon k \hookrightarrow \mathbf{C}$$

w ciało liczb zespolonych $\mathbf{C}$. Będziemy oznaczali przez $(-)_0$ funktor zmiany bazy wzdłuż ι. Dla większości zastosowań moglibyśmy wziąć $K = \mathbf{C}((t))$ oraz $\iota = \mathrm{id}$. Jednak z arytmetycznego punktu widzenia warto jest rozważać nieco ogólniejszy przypadek.

7.1.1. **Realizacja Bettiego dla schematów.** Pierwszym wynikiem [Hab5] jest konstrukcja funktora realizacji topologicznej Bettiego dla schematów lokalnie skończonego typu nad K. Ma on postać

$$\Psi \colon \mathbf{Sch}_K^{\mathrm{lft}} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_{/\mathbf{S}^1}$$

gdzie **Spaces** to ∞-kategoria przestrzeni (kompleksów Kana), zaś $\mathbf{Spaces}_{/\mathbf{S}^1}$ to jej *slice* nad okręgiem $\mathbf{S}^1$. Dla ułatwienia można zamiast kategorii $\mathbf{Spaces}_{/\mathbf{S}^1}$ wziąć jej kategorię homotopii, czyli slice $\mathbf{H}_{\mathbf{S}^1}$ kategorii homotopii zbiorów symplicjalnych (lub CW-kompleksów) nad okręgiem; wzbogacenie ∞-kategoryjne jest jednak istotne dla brania homotopijnych kogranic, co jest wykorzystywane w warunku snopa poniżej.

Funktor Ψ ma następujące własności:

1. (Skończoność) Jeżeli X jest separowalny i skończonego typu nad K, wówczas $\Psi(X)$ ma typ homotopii rozwłóknienia skończonych CW-kompleksów nad $\mathbf{S}^1$.

2. (Warunek snopa) Funktor Ψ spełnia homotopijny warunek snopa (*homotopical descent*) w h-topologii: jeżeli $Y_\bullet \to X$ jest h-hipernakryciem, wówczas indukowane odwzorowanie
$$\operatorname{hocolim} \Psi(Y_\bullet) \longrightarrow \Psi(X)$$
jest równoważnością.

3. (Dobra redukcja) Jeżeli X jest włóknem ogólnym gładkiego i właściwego schematu $\mathcal{X}$ nad pierścieniem waluacji $\mathcal{O}_K$, wówczas mamy naturalną homotopijną równoważność
$$\Psi(X) \simeq (\mathcal{X}_0)_{\mathrm{top}} \times \mathbf{S}^1.$$

4. (Semistabilna redukcja, z brzegiem) Niech $\mathcal{Y}$ będzie właściwym, płaskim i regularnym schematem nad $\mathcal{O}_K$ i niech $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Y}$ będzie dywizorem o normalnych przecięciach zawierającym zredukowane włókno szczególne $(\mathcal{Y}_k)_{\mathrm{red}}$. Niech $X = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{D}$. Wtedy mamy naturalne utożsamienie
$$\Psi(X) \simeq \mathcal{Y}_{0,\log}$$
gdzie $\mathcal{Y}_{0,\log}$ jest przestrzenią Kato–Nakayamy logarytymicznego włókna szczególnego $\mathcal{Y}_0$, traktowaną jako przestrzeń nad $0_{\log} = \mathbf{S}^1$. (Zob. §7.2)

5. (Porównanie z etalnym typem homotopii) Załóżmy, że ciało rezidualne k jest algebraicznie domknięte. Wówczas mamy naturalne utożsamienie
$$\widehat{\Psi}(X) \simeq \widehat{\Pi}^{\text{ét}}(X)$$
pomiędzy proskończonym uzupełnieniem $\Psi(X)$ a proskończonym uzupełnieniem etalnego typu homotopii [AM69] schematu X.

6. (Porównanie z kohomologiami de Rhama) Wybierzmy izomorfizm $K \simeq k((t))$. Dla X skończonego typu istnieje funktorialny skończenie generowany wolny $\mathcal{O}_K$-moduł z gradacją $H^*(X)$, wyposażony w logarytmiczną koneksję ∇ oraz filtrację Hodge'a spełniającą warunek transwersalności Griffithsa, oraz kanoniczne izomorfizmy
$$H^*(X) \otimes_{\mathcal{O}_K} K \simeq H^*_{\mathrm{dR}}(X/K), \qquad H^*(X) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbf{C} \simeq H^*(\widetilde{\Psi}(X), \mathbf{C}),$$
gdzie pierwszy izomorfizm jest kompatybilny z koneksjami i filtracjami Hodge'a, drugi zaś utożsamia operator monodromii z $\exp(-2\pi i \operatorname{res}_0 \nabla)$. Tutaj $\widetilde{\Psi}(X)$ jest włóknem homotopijnym $\Psi(X)$ nad $1 \in \mathbf{S}^1$.

Uwaga 7.1. W kontekście rozmaitości niearchimedesowych (opisanym poniżej), konstrukcję grup kohomologii Bettiego
$$H^*(\widetilde{\Psi}(X), \mathbf{Z})$$
podał niezależnie Berkovich w nieopublikowanej pracy [Ber15]. Na konferencji *Bernstein 75* w 2020 r., Berkovich opisał w jaki sposób wyposażyć te grupy w rodzaj mieszanej struktury Hodge'a.

Konstrukcja funktora opiera się z jednej strony na technice *spreading out*, z drugiej zaś na geometrii logarytmicznej. Przez „spreading out” mamy tu na myśli fakt, że schemat skończonego typu nad $K = \mathbf{C}((t))$ powstaje przez zmianę bazy ze schematu skończonego typu nad pewną gładką $\mathbf{C}[t]$-podalgebrą $\mathbf{C}[\![t]\!]$, a zatem i skończonego typu nad $\mathbf{C}$. Dla takich schematów możemy zastosować „zwykły” typ homotopii nad $\mathbf{C}$, z którego możemy otrzymać $\Psi(X)$. Drugi składnik, geometrię logarytmiczną, opiszemy w następnym podrozdziale.

7.1.2. **Przestrzenie niearchimedesowe.** Omówmy pokrótce podstawowe pojęcia z geometrii niearchimedesowej nad ciałem niearchimedesowym K [Bos14, BGR84, Tat71]. Oznaczmy przez $\mathcal{O}_K \subseteq K$ pierścień waluacji i wybierzmy niezerowy element t w ideale maksymalnym $\mathfrak{m}_K$. Bazowym obiektem jest *algebra Tate'a*

$$K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle = \left(\varprojlim_n (\mathcal{O}_K/t^n)[T_1, \ldots, T_r]\right) \otimes_{\mathcal{O}_K} K.$$

Równoważnie, jest to uzupełnienie pierścienia wielomianów $K[T_1, \ldots, T_r]$ względem *normy Gaussa*

$$|f| = \sup_{n \in \mathbf{N}^r} |a_n| \qquad \text{gdy } f = \sum_{n \in \mathbf{N}^r} a_n T^n.$$

(Używamy tu notacji $T^n = T_1^{n_1} \cdots T_r^{n_r}$ gdy $n = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{N}^r$.) *Algebrą afinoidalną* nad K nazwiemy K-algebrę A dla której istnieje surjekcja

$$\alpha\colon K\langle T_1, \ldots, T_r\rangle \longrightarrow A$$

dla pewnego $r \geq 0$. Normy indukowane na A przez normę Gaussa przez dwie takie surjekcje są równoważne, zatem A można uznać za algebrę Banacha nad K; każdy homomorfizm afinoidalnych K-algebr jest automatycznie ciągły.

Z algebrą afinoidalną A stowarzyszamy jej *spektrum afinoidalne* $X = \mathrm{Sp}(A)$. Jako zbiór, składa się ono z ideałów maksymalnych A. W teorii Tate'a [Tat71] wyposażony on zostaje w *topologię dopuszczalną*, która nie jest topologią w zwykłym sensie, a tzw. G-topologią: oprócz rodziny „dopuszczalnych podzbiorów otwartych” $U \subseteq X$ zadane są też rodziny „dopuszczalnych pokryć otwartych” $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ spełniające pewne aksjomaty naturalne z punktu widzenia teorii snopów. Tate skonstruował snop pierścieni $\mathcal{O}_X$ na $X = \mathrm{Sp}(A)$ i udowodnił, że $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$ (oraz wyższe kohomologie znikają), zupełnie jak w przypadku schematów afinicznych.

Przestrzenią niearchimedesową (rigid-analytic space) nad K nazywamy przestrzeń G-topologiczną X wraz ze snopem K-algebr $\mathcal{O}_X$ o lokalnych źdźbłach, która jest lokalnie izomorficzna z $\mathrm{Sp}(A)$ dla pewnej afinoidalnej K-algebry A. Morfizmy pomiędzy przestrzeniami niearchimedesowymi to morfizmy lokalnie upierścienionych G-przestrzeni nad $\mathrm{Sp}(K)$. Odpowiednią kategorię oznaczamy przez $\mathbf{Rig}_K$. Wiele pojęć i technik z geometrii algebraicznej ma swoje odpowiedniki w geometrii niearchimedesowej: snopy koherentne, snopy różniczek, morfizmy właściwe, topologia etalna itd.

Istnieją dwa naturalne źródła przestrzeni niearchimedesowych: schematy nad K oraz schematy formalne nad $\mathcal{O}_K$. Dla schematu lokalnie skończonego typu X nad K mamy jego *uanali-*

tycznienie, czyli przestrzeń niearchimedesową X^{an} nad K wraz z morfizmem lokalnie upierścienionych G-przestrzeni nad K

$$\varepsilon\colon X^{\mathrm{an}} \longrightarrow X$$

który jest uniwersalnym takim morfizmem. Punkty X^{an} są w bijekcji z punktami domkniętymi schematu X.

Rozważamy schematy formalne $\mathcal{X}$ lokalnie skończonego typu nad $\mathcal{O}_K$, czyli lokalnie postaci

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{A}), \qquad A \simeq \mathcal{O}_K\langle T_1,\dots,T_r\rangle/I$$

gdzie $\mathcal{O}_K\langle T_1,\dots,T_r\rangle = \varprojlim_n (\mathcal{O}_K/t^n)[T_1,\dots,T_r]$ jest t-adycznym uzupełnieniem pierścienia wielomianów $\mathcal{O}_K[T_1,\dots,T_r]$. Odpowiednią kategorię oznaczmy przez $\mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}$. Przypisując afinicznemu schematowi formalnemu $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$ jak w powyższym lokalnym opisie przestrzeń afinoidalną $\mathcal{X}_{\mathrm{rig}} = \mathrm{Sp}(A)$ gdzie $A = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ i odpowiednio sklejając, możemy skonstruować dla każdego schematu formalnego $\mathcal{X}$ lokalnie skończonego typu nad $\mathcal{O}_K$ jego *włókno ogólne* $\mathcal{X}_{\mathrm{rig}}$. Dostajemy w ten sposób funktor

$$(-)_{\mathrm{rig}}\colon\ \mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K} \longrightarrow \mathbf{Rig}_K\,.$$

Dla ustalonej przestrzeni niearchimedesowej X nad K, każdy schemat formalny $\mathcal{X}$ nad $\mathcal{O}_K$ wraz z utożsamieniem $X \simeq \mathcal{X}_{\mathrm{rig}}$ nazywamy *modelem formalnym* przestrzeni X.

Jeżeli $\mathcal{Z}$ jest schematem formalnym dla którego $t^n \cdot \mathcal{O}_{\mathcal{Z}} = 0$, wówczas $\mathcal{Z}_{\mathrm{rig}} = \emptyset$. Jeżeli $\mathcal{Z}$ jest domkniętym podschematem formalnym w $\mathcal{X}$ dla którego $\mathcal{Z}_{\mathrm{rig}} = \emptyset$, wówczas możemy zdefiniować *formalne dopuszczalne rozdmuchanie*

$$\pi\colon\ \mathrm{Bl}_{\mathcal{Z}}\,\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X},$$

które jest morfizmem indukującym izomorfizm na włóknach ogólnych. Funktor $(-)_{\mathrm{rig}}$ faktoryzuje się zatem przez kategoryjną lokalizację $\mathbf{FSch}_{\mathcal{O}_K}[B^{-1}]$ gdzie B oznacza klasę wszystkich dopuszczalnych rozdmuchań. Jak pokazał Raynaud [Ray74] (zob. [Bos14, §8]), funktor ten indukuje równoważność kategorii

$$\mathbf{FSch}^{\mathrm{ft}}_{\mathcal{O}_K}[B^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rig}^{\mathrm{qcqs}}_K \tag{7.2}$$

pomiędzy lokalizacją kategorii schematów formalnych skończonego typu nad $\mathcal{O}_K$ względem dopuszczalnych rozdmuchań a kategorią kwazi-zwartych i kwazi-separowalnych przestrzeni niearchimedesowych nad K. Twierdzenie to pozwala *zdefiniować* pojęcie przestrzeni niearchimedesowej czysto za pomocą teorii schematów formalnych i ich „geometrii biwymiernej,” nie odwołując się do niezręcznego pojęcia G-topologii.

7.1.3. **Realizacja Bettiego dla przestrzeni niearchimedesowych.** W dalszej części pracy [Hab5] konstruujemy podobny funktor dla gładkich przestrzeni niearchimedesowych nad ciałem K

$$\Psi_{\mathrm{rig}}\colon\ \mathbf{Rig}^{\mathrm{sm}}_K \longrightarrow \mathbf{Spaces}_{/\mathbf{S}^1}$$

W tym przypadku technika *spreading out* nie jest dostępna, i konstrukcja przebiega przez geometrię logarytmiczną.

Najważniejszym krokiem w konstrukcji jest skonstruowanie $\Psi_{\mathrm{rig}}(X)$ gdy X jest kwazi-zwarta i kwazi-separowalna. Dzięki równoważności Raynauda (7.2) (czy raczej jej ∞-kategoryjnego odpowiednika), wystarczy skonstruować funktor z kategorii schematów formalnych $\mathbf{FSch}^{\mathrm{ft}}_{\mathcal{O}_K}$ który posyła dopuszczalne rozdmuchania na homotopijne równoważności. W rzeczywistości, wyróżniamy w niej podkategorię *dobrych modeli formalnych* $\mathbf{GM}_{\mathcal{O}_K}$, czyli z grubsza semistabilnych schematów formalnych. Dzięki rozwiązaniu osobliwości, mamy wtedy wariant twierdzenia Raynaud:

$$\mathbf{GM}_{\mathcal{O}_K}[B^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rig}_K^{\mathrm{sm,qcqs}}.$$

Dzięki słabemu twierdzeniu o faktoryzacji w wersji Abramovicha–Temkina [AT19], każde dwa dobre modele formalne ustalonej gładkiej przestrzeni sztywnej X da się połączyć zygzakiem *prostych rozdmuchań* [Hab5, Definition 5.12]. Zatem, dla konstrukcji funktora Ψ_{rig} (w przypadku kwazi-zwartym i kwazi-separowalnym), wystarczy skonstruować funktor

$$\mathbf{GM}_{\mathcal{O}_K} \longrightarrow \mathbf{Spaces}_{/\mathbf{S}^1}$$

posyłający proste rozdmuchania na homotopijne równoważności. Robimy to poniżej za pomocą geometrii logarytmicznej.

Funktor Ψ_{rig} jest kompatybilny z funktorem Ψ w następującym sensie. Dla gładkiego schematu X nad K mamy funktorialną homotopijną równoważność

$$\Psi(X) \simeq \Psi_{\mathrm{rig}}(X^{\mathrm{an}}) \tag{7.3}$$

gdzie X^{an} to niearchimedesowe uanalitycznienie X. Ponieważ rozmaitość niearchimedesowa X^{an} jest kwazi-zwarta i kwazi-separowalna jedynie w przypadku, gdy schemat X jest właściwy nad K, dowód powyższej kompatybilności jest dość subtelny. Wymaga on rozszerzenia funktora Ψ_{rig} na pary (X,D) gdzie X jest gładką rozmaitością niearchimedesową nad K a D jest dywizorem o normalnych przecięciach na X. Równoważność (7.3) wynika wtedy z „twierdzenia o czystości” [Hab5, Theorem 5.21], czyli z równoważności homotopijnej

$$\Psi_{\mathrm{rig}}(X \setminus D) \xrightarrow{\sim} \Psi_{\mathrm{rig}}(X,D).$$

7.2. Geometria logarytmiczna i przestrzenie Kato–Nakayamy

Geometria logarytmiczna [Kat89, ACG+13] jest narzędziem w geometrii algebraicznej pomocnym w badaniu uzwarceń i degeneracji. Bazowym pojęciem jest *struktura logarytmiczna* na schemacie (lub przestrzeni upierścienionej) X, czyli homomorfizm snopów monoidów

$$\alpha\colon \mathcal{M}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

gdzie $\mathcal{O}_X$ jest monoidem ze względu na mnożenie, spełniający warunek, że indukowane odwzorowanie $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \to \mathcal{O}_X^\times$ jest izomorfizmem. Parę $(X,\mathcal{M}_X)$ nazywamy *schematem logarytmicznym*, lub krótko *log schematem*.

W pracy [KN99], Kato i Nakayama rozszerzyli konstrukcję realizacji Bettiego $X \mapsto X_{\mathrm{top}}$ na log schematy lokalnie skończonego typu nad $\mathbf{C}$ (dokładniej, log schematy *fine and saturated*, czyli fs). Otrzymaną przez nich przestrzeń topologiczną przypisaną log schematowi $(X,\mathcal{M}_X)$ oznaczamy przez $X_{\log}$ i nazywamy *przestrzenią Kato–Nakayamy* lub *realizacją Bettiego* log schematu $(X,\mathcal{M}_X)$. Wyposażona jest ona w naturalny właściwy morfizm przestrzeni topologicznych

$$\tau\colon X_{\log} \longrightarrow X_{\mathrm{top}}.$$

Modelem dla struktur logarytmicznych fs są afiniczne rozmaitości toryczne $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[P])$ gdzie P jest torycznym podmonoidem kraty charakterów M, a snop $\mathcal{M}_X$ to snop lokalnych przekrojów $\mathcal{O}_X$ których obcięcie do otwartej orbity $X^\circ = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}[M])$ jest odwracalne. W tym przypadku, przestrzeń Kato–Nakayamy $(X,\mathcal{M}_X)$ ma prosty opis

$$X_{\log} = \mathrm{Hom}(P,[0,\infty)\times \mathbf{S}^1) \qquad \text{(homomorfizmy monoidów)}.$$

Naturalne rzutowanie $X_{\log} \to X_{\mathrm{top}} = \mathrm{Hom}(P,\mathbf{C})$ jest indukowane przez morfizm „współrzędnych biegunowych"

$$\mu\colon [0,\infty)\times \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{C}, \qquad \mu(r,\theta) = re^{i\theta}.$$

Jeżeli $\mathcal{X}$ jest dobrym modelem formalnym, czyli obiektem kategorii $\mathbf{GM}_{\mathcal{O}_K}$, wówczas jego włókno szczególne $\mathcal{X}_0$ jest w naturalny sposób wyposażone w strukturę logarytmiczną. Możemy zatem rozważać przestrzeń Kato–Nakayamy $(\mathcal{X}_0)_{\log}$. Ponieważ dla $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ dostajemy okrąg $\mathbf{S}^1$, otrzymaliśmy w ten sposób funktor $\mathbf{GM}_{\mathcal{O}_K} \to \mathbf{Spaces}_{/\mathbf{S}^1}$.

Kluczowym technicznym wynikiem pracy [Hab5] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2. *Niech $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ będą dobrymi modelami formalnymi nad $\mathcal{O}_K$ i niech $\pi\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ będzie prostym rozdmuchaniem. Wówczas indukowane odwzorowanie*

$$\pi\colon (\mathcal{X}_0')_{\log} \longrightarrow (\mathcal{X}_0)_{\log}$$

jest homotopijną równoważnością.

Głównym elementem dowodu jest jawne obliczenie włókien rozważanego odwzorowania. Są one ściągalne, co zgodnie z twierdzeniem Smale'a [Sma57] implikuje, że odwzorowanie to jest homotopijną równoważnością.

Konstrukcję $\Psi_{\mathrm{rig}}(X)$ możemy zatem opisać za pomocą następującego diagramu, w którym $\mathcal{X}$ jest dowolnym dobrym modelem formalnym X:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] & \mathcal{X}_0 \arrow[l] \arrow[d] & (\mathcal{X}_0)_{\log} \arrow[l] \arrow[d] \arrow[r, equal] & \Psi_{\mathrm{rig}}(X) \arrow[d] \\
\mathrm{Sp}(K) \arrow[r] & \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) & (\mathrm{Spec}(\mathbf{C}),\mathcal{M}) \arrow[l] & (\mathrm{Spec}(\mathbf{C}),\mathcal{M})_{\log} \arrow[l] \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{S}^1.
\end{tikzcd}$$

Obiekty w górnym wierszu należą do rozmaitych kategorii. Są one od lewej kolejno: rozmaitością niearchimedesową nad K, schematem formalnym nad $\mathcal{O}_K$, log schematem nad $\mathbf{C}$ (gdzie $\mathrm{Spec}(\mathbf{C})$ jest wyposażone w standardową log strukturę rangi 1, $\mathcal{M} = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{N}$) oraz przestrzenią topologiczną rozwłóknioną nad okręgiem $\mathbf{S}^1$.

Uwaga 7.3. W pracy [AO20], wspólnie z A. Ogusem badamy związek topologii degeneracji, a dokładniej zjawiska monodromii, z geometrią logarytmiczną. Wpisuje się ona dobrze w profil omawianych tu badań. Niestety, została ona opublikowana w nowym czasopiśmie, które nie widnieje w ministerialnym „wykazie czasopism punktowanych”, w związku z czym nie stanowi ona części osiągnięcia habilitacyjnego.

7.3. Przykłady i pytania

Konstrukcja funktora Ψ_{rig} pozwala formułować niearchimedesowe odpowiedniki znanych wyników na temat rozmaitości zespolonych i Kählerowskich. Dla przykładu, zespolona *powierzchnia Hopfa*

$$X = (\mathbf{C}^2 \setminus 0)/q^{\mathbf{Z}} \qquad (q \in \mathbf{C}, 0 < |q| < 1)$$

jest najprostszym przykładem zwartej zespolonej rozmaitości bez formy Kählera. Ma ona typ homotopii $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^3$. Traktując parametr q jako parametr formalny otrzymujemy „w granicy $q \to 0$” niearchimedesową powierzchnię Hopfa (badaną szczegółowo przez Voskuila [Vos91])

$$X = (\mathbf{A}^{2,\mathrm{an}}_{\mathbf{C}((q))} \setminus 0)/q^{\mathbf{Z}} \quad \text{nad} \quad \mathbf{C}((q)).$$

Pokazaliśmy [Hab5, Example 5.25], że jej realizacja Bettiego $\Psi_{\mathrm{rig}}(X)$ jest homotopijnie równoważna z rzutowaniem

$$(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^3) \times \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1.$$

Byłoby ciekawe znaleźć konceptualny powód dla homotopijnej równoważności zespolonej oraz niearchimedesowej powierzchni Hopfa.

Innym ciekawym pytaniem, którego postawienie umożliwia praca [Hab5], jest pytanie o możliwe grupy podstawowe $\pi_1(\widetilde{\Psi}_{\mathrm{rig}}(X))$ dla X właściwego nad $\mathbf{C}((t))$, gdzie $\widetilde{\Psi}_{\mathrm{rig}}(X)$ jest włóknem homotopijnym $\Psi_{\mathrm{rig}}(X) \to \mathbf{S}^1$. W kontekście rozmaitości zespolonych, Taubes [Tau92] (zob. też [PP12, PP14]) udowodnił, że każda skończenie prezentowalna grupa jest grupą podstawową zwartej trójwymiarowej rozmaitości zespolonej. Możliwe, że analogiczne twierdzenie jest prawdziwe w kontekście właściwych gładkich rozmaitości niearchimedesowych nad $\mathbf{C}((q))$.

Stwierdzenie analogiczne do wyniku Taubesa jest dalekie od prawdy w przypadku zespolonych rozmaitości Kählerowskich lub rzutowych. W istocie, istnienie struktury Kählera jest silnym ograniczeniem na typ homotopii rozmaitości zespolonej, w szczególności na jej grupę podstawową [ABC$^+$96] (grupy powstające w ten sposób nazywamy *kählerowskimi*). Dla przykładu, z *symetrii Hodge'a*

$$h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X), \qquad h^{p,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega^p_X)$$

wynika, że liczby Bettiego $b_n(X) = \dim H^n(X, \mathbf{Q})$ są parzyste dla n nieparzystego. W szczególności, wymiar $\dim \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbf{Q}) = b_1(X)$ jest parzysty, więc na przykład grupa $\mathbf{Z}$ nie jest kählerowska.

Jak niedawno zaobserwował Li [Li20], w kontekście geometrii niearchimedesowej istnieje dobry odpowiednik warunku Kählera, mianowicie pojęcie rozmaitości *z rzutową redukcją*. Powiemy, że rozmaitość niearchimedesowa właściwa X nad ciałem niearchimedesowym K ma *rzutową redukcję*, jeżeli posiada ona model formalny $\mathfrak{X}$ nad $\mathcal{O}_K$ którego włókno szczególne $\mathfrak{X}_k$ jest schematem rzutowym nad k. Hansen i Li [HL20] udowodnili, że rozmaitości gładkie z rzutową redukcją nad ciałem niearchimedesowym charakterystyki zero spełniają symetrię Hodge'a w wymiarze jeden: $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$. W szczególności pokazuje to, że niearchimedesowa powierzchnia Hopfa nie ma rzutowej redukcji (ta obserwacja została poczyniona wcześniej w [Li20]). Pokazuje to, że rzutowa redukcja stanowi ograniczenie na możliwy typ homotopii $\widetilde{\Psi}_{\mathrm{rig}}(X)$. Ciekawym pytaniem jest, czy klasa grup kählerowskich pokrywa się z klasą możliwych grup podstawowych $\pi_1(\widetilde{\Psi}_{\mathrm{rig}}(X))$ dla X właściwych i gładkich z rzutową redukcją nad ciałem $\mathbf{C}((t))$.

We wspomnianej pracy, Hansen i Li postawili pytanie, czy rozmaitości gładkie z rzutową redukcją nad ciałem niearchimedesowym K charakterystyki zero zawsze spełniają symetrię Hodge'a (zob. też [Sch18]). Okazuje się, że nie jest to prawdą gdy K jest p-adyczne [Pet21]. W pracy [Ach20] (jeszcze nieopublikowanej, zatem niewchodzącej w skład osiągnięcia habilitacyjnego) pokazałem, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca gdy $K = \mathbf{C}((t))$ (oraz przy pewnych założeniach nad K p-adycznym). Wynika stąd w szczególności, że liczby Bettiego $b_n(\widetilde{\Psi}_{\mathrm{rig}}(X))$ są parzyste dla n nieparzystego gdy X ma rzutową redukcję.

Literatura

[ABC⁺96] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick, and D. Toledo, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. MR 1379330

[ACG⁺13] Dan Abramovich, Qile Chen, Danny Gillam, Yuhao Huang, Martin Olsson, Matthew Satriano, and Shenghao Sun, *Logarithmic geometry and moduli*, Handbook of moduli. Vol. I, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 24, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 1–61. MR 3184161

[Ach15] Piotr Achinger, *$K(\pi,1)$-neighborhoods and comparison theorems*, Compos. Math. **151** (2015), no. 10, 1945–1964. MR 3414390

[Ach20] ———, *Hodge symmetry for rigid varieties via log hard Lefschetz*, arXiv preprint arXiv:2005.02246, accepted for publication in Mathematical Research Letters, 2020.

[ALY21a] Piotr Achinger, Marcin Lara, and Alex Youcis, *Geometric arcs and fundamental groups of rigid spaces*, arXiv preprint arXiv:2105.05184, 2021.

[ALY21b] ———, *Specialization for the pro-étale fundamental group*, arXiv preprint arXiv:2107.06761, 2021.

[AM69] Michael Artin and Barry Mazur, *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, No. 100, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969. MR 0245577

[AM77] ———, *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 1, 87–131. MR 0457458

[AO20] Piotr Achinger and Arthur Ogus, *Monodromy and log geometry*, Tunis. J. Math. **2** (2020), no. 3, 455–534. MR 4041282

[AS21] Piotr Achinger and Junecue Suh, *Some refinements of the Deligne–Illusie theorem*, arXiv preprint arXiv:2003.09857, 2020, revised in 2021.

[AT19] Dan Abramovich and Michael Temkin, *Functorial factorization of birational maps for qe schemes in characteristic 0*, Algebra Number Theory **13** (2019), no. 2, 379–424. MR 3927050

[AWZ20] Piotr Achinger, Jakub Witaszek, and Maciej Zdanowicz, *Global Frobenius liftability II: surfaces and Fano threefolds*, arXiv preprint arXiv:2102.02788, accepted for publication in Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 2017, revised in 2020.

[Bei16] Alexander Beilinson, *Constructible sheaves are holonomic*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 4, 1797–1819. MR 3573946

[Ber74] Pierre Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. MR 0384804

[Ber15] Vladimir G. Berkovich, *Complex analytic vanishing cycles for formal schemes*, preprint available at `http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~vova/FormIV_2015.pdf` (2015).

[BG19] James Borger and Lance Gurney, *Canonical lifts of families of elliptic curves*, Nagoya Math. J. **233** (2019), 193–213. MR 3901636

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry. MR 746961

[BHH87] Gottfried Barthel, Friedrich Hirzebruch, and Thomas Höfer, *Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen*, Aspects of Mathematics, D4, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987. MR 912097

[BK86] Spencer Bloch and Kazuya Kato, *p-adic étale cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1986), no. 63, 107–152. MR 849653

[BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978. MR 0491705

[Bos14] Siegfried Bosch, *Lectures on formal and rigid geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2105, Springer, Cham, 2014. MR 3309387

[BTLM97] Anders Buch, Jesper F. Thomsen, Niels Lauritzen, and Vikram Mehta, *The Frobenius morphism on a toric variety*, Tohoku Math. J. (2) **49** (1997), no. 3, 355–366. MR 1464183

[BW74] D. M. Burns, Jr. and Jonathan M. Wahl, *Local contributions to global deformations of surfaces*, Invent. Math. **26** (1974), 67–88. MR 0349675

[Car90] H. Carayol, *Nonabelian Lubin-Tate theory*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 15–39. MR 1044827

[Cha09] François Charles, *Conjugate varieties with distinct real cohomology algebras*, J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 125–139. MR 2526787

[CP91] Frédéric Campana and Thomas Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann. **289** (1991), no. 1, 169–187. MR 1087244

[CvS09] Sławomir Cynk and Duco van Straten, *Small resolutions and non-liftable Calabi-Yau threefolds*, Manuscripta Math. **130** (2009), no. 2, 233–249. MR 2545516 (2010k:14074)

[Deb89] Olivier Debarre, *Images lisses d'une variété abélienne simple*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309** (1989), no. 2, 119–122. MR 1004953

[Del81] Pierre Deligne, *Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques*, Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, Berlin-New York, 1981, With the collaboration of L. Illusie, With an appendix by Nicholas M. Katz, pp. 80–137. MR 638599

[DHP08] Jean-Pierre Demailly, Jun-Muk Hwang, and Thomas Peternell, *Compact manifolds covered by a torus*, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 2, 324–340. MR 2393263

[DI87] Pierre Deligne and Luc Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham*, Invent. Math. **89** (1987), no. 2, 247–270. MR 894379

[Dri74] V. G. Drinfel'd, *Elliptic modules*, Mat. Sb. (N.S.) **94(136)** (1974), 594–627, 656. MR 0384707

[Dri76] ———, *Coverings of p-adic symmetric domains*, Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 2, 29–40. MR 0422290

[Eas08] Robert W. Easton, *Surfaces violating Bogomolov-Miyaoka-Yau in positive characteristic*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 7, 2271–2278. MR 2390492

[Fri73] Eric M. Friedlander, *$K(\pi, 1)$'s in characteristic $p > 0$*, Topology **12** (1973), 9–18. MR 0313254

[Fuj95] Kazuhiro Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in étale topology*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 15–57. MR 1360610

[Ful93] William Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry. MR 1234037

[Gab94] Ofer Gabber, *Affine analog of the proper base change theorem*, Israel J. Math. **87** (1994), no. 1-3, 325–335. MR 1286833

[Gir71] Jean Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR 0344253

[GKP16] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell, *Étale fundamental groups of Kawamata log terminal spaces, flat sheaves, and quotients of abelian varieties*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 10, 1965–2004. MR 3522654

[Gor88] Gary Gordon, *Algebraic characteristic sets of matroids*, J. Combin. Theory Ser. B **44** (1988), no. 1, 64–74. MR 923266

[Gra20] Przemysław Grabowski, *Canonical lifts of Calabi—Yau varieties*, praca magisterska MIM UW, 2020.

[Gro67] Alexander Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1967), no. 32, 361. MR 0238860 (39 #220)

[Hir99] Masayuki Hirokado, *A non-liftable Calabi-Yau threefold in characteristic* 3, Tohoku Math. J. (2) **51** (1999), no. 4, 479–487. MR 1725623 (2000m:14044)

[HL20] David Hansen and Shizhang Li, *Line bundles on rigid varieties and Hodge symmetry*, Math. Z. **296** (2020), no. 3-4, 1777–1786. MR 4159850

[HM01] Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok, *Projective manifolds dominated by abelian varieties*, Math. Z. **238** (2001), no. 1, 89–100. MR 1860736

[HM04] ———, *Birationality of the tangent map for minimal rational curves*, Asian J. Math. **8** (2004), no. 1, 51–63. MR 2128297

[Ill71] Luc Illusie, *Complexe cotangent et déformations. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. MR 0491680 (58 #10886a)

[Ill05] ———, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, Fundamental algebraic geometry, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, With a letter (in French) of Jean-Pierre Serre, pp. 179–233. MR 2223409

[Ito05] Tetsushi Ito, *Weight-monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties*, Invent. Math. **159** (2005), no. 3, 607–656. MR 2125735

[Jac94] Krzysztof Jaczewski, *Generalized Euler sequence and toric varieties*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992), Contemp. Math., vol. 162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 227–247. MR 1272701

[JR03] Kirti Joshi and C. S. Rajan, *Frobenius splitting and ordinarity*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 2, 109–121. MR 1936581

[Kat70] Nicholas M. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1970), no. 39, 175–232. MR 0291177

[Kat72] ———, *Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration)*, Invent. Math. **18** (1972), 1–118. MR 0337959

[Kat79] ———, *Slope filtration of F-crystals*, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I, Astérisque, vol. 63, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 113–163. MR 563463

[Kat81] ———, *Serre-Tate local moduli*, Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), Lecture Notes in Math., vol. 868, Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 138–202. MR 638600

[Kat89] Kazuya Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989, pp. 191–224. MR 1463703 (99b:14020)

[Ked02] Kiran S. Kedlaya, *Étale covers of affine spaces in positive characteristic*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 11, 921–926. MR 1952550

[KN99] Kazuya Kato and Chikara Nakayama, *Log Betti cohomology, log étale cohomology, and log de Rham cohomology of log schemes over* **C**, Kodai Math. J. **22** (1999), no. 2, 161–186. MR 1700591

[Kol96] János Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996. MR 1440180

[Kur80] Akira Kurihara, *Construction of p-adic unit balls and the Hirzebruch proportionality*, Amer. J. Math. **102** (1980), no. 3, 565–648. MR 573103

[KW15] Oskar Kędzierski and Jarosław A. Wiśniewski, *Differentials of Cox rings: Jaczewski's theorem revisited*, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), no. 2, 595–608. MR 3340188

[Lan15] Adrian Langer, *Bogomolov's inequality for Higgs sheaves in positive characteristic*, Invent. Math. **199** (2015), no. 3, 889–920. MR 3314517

[Lan16] ———, *The Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality for logarithmic surfaces in positive characteristic*, Duke Math. J. **165** (2016), no. 14, 2737–2769. MR 3551772

[Lau81] G. Laumon, *Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne)*, The Euler-Poincaré characteristic (French), Astérisque, vol. 83, Soc. Math. France, Paris, 1981, pp. 173–219. MR 629128

[Laz84] Robert Lazarsfeld, *Some applications of the theory of positive vector bundles*, Complete intersections (Acireale, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1092, Springer, Berlin, 1984, pp. 29–61. MR 775876

[Li20] Shizhang Li, *On rigid varieties with projective reduction*, J. Algebraic Geom. **29** (2020), no. 4, 669–690. MR 4158462

[LM97] Niels Lauritzen and Vikram Mehta, *Fibre products of homogeneous spaces*, J. Algebra **189** (1997), no. 2, 568–576. MR 1438189

[LR97] Niels Lauritzen and A. Prabhakar Rao, *Elementary counterexamples to Kodaira vanishing in prime characteristic*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **107** (1997), no. 1, 21–25. MR 1453823

[LS77] Herbert Lange and Ulrich Stuhler, *Vektorbündel auf Kurven und Darstellungen der algebraischen Fundamentalgruppe*, Math. Z. **156** (1977), no. 1, 73–83. MR 0472827

[LS14] Christian Liedtke and Matthew Satriano, *On the birational nature of lifting*, Adv. Math. **254** (2014), 118–137. MR 3161094

[Maz73] Barry Mazur, *Frobenius and the Hodge filtration (estimates)*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 58–95. MR 0321932

[Mes72] William Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. MR 0347836

[Moc96] Shinichi Mochizuki, *A theory of ordinary p-adic curves*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **32** (1996), no. 6, 957–1152. MR 1437328

[MS87] Vikram B. Mehta and Vasudevan Srinivas, *Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle*, Compositio Math. **64** (1987), no. 2, 191–212, With an appendix by Srinivas and M. V. Nori. MR 916481

[Mus78] G. A. Mustafin, *Non-Archimedean uniformization*, Mat. Sb. (N.S.) **105(147)** (1978), no. 2, 207–237, 287. MR 0491696

[Nyg83] Niels O. Nygaard, *The Tate conjecture for ordinary $K3$ surfaces over finite fields*, Invent. Math. **74** (1983), no. 2, 213–237. MR 723215

[NZ10] Noboru Nakayama and De-Qi Zhang, *Polarized endomorphisms of complex normal varieties*, Math. Ann. **346** (2010), no. 4, 991–1018. MR 2587100

[OW02] Gianluca Occhetta and Jarosław A. Wiśniewski, *On Euler-Jaczewski sequence and Remmert-van de Ven problem for toric varieties*, Math. Z. **241** (2002), no. 1, 35–44. MR 1930984

[Pet21] Alexander Petrov, *Rigid-analytic varieties with projective reduction violating Hodge symmetry*, Compos. Math. **157** (2021), no. 3, 625–640. MR 4236196

[PP12] D. Panov and A. Petrunin, *Telescopic actions*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), no. 6, 1814–1831. MR 3000502

[PP14] ———, *The telescopic construction: a microsurvey*, Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2013, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2014, pp. 110–119. MR 3287802

[PS89] Kapil H. Paranjape and Vasudevan Srinivas, *Self-maps of homogeneous spaces*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 425–444. MR 1016272

[Ray74] Michel Raynaud, *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,$\cdots$*, Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972), 1974, pp. 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. MR 0470254

[Ray94] M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 425–462. MR 1253200 (94m:14034)

[RTW13] Bertrand Rémy, Amaury Thuillier, and Annette Werner, *Automorphisms of Drinfeld half-spaces over a finite field*, Compos. Math. **149** (2013), no. 7, 1211–1224. MR 3078645

[Sai17a] Takeshi Saito, *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Invent. Math. **207** (2017), no. 2, 597–695. MR 3595935

[Sai17b] ———, *Wild ramification and the cotangent bundle*, J. Algebraic Geom. **26** (2017), no. 3, 399–473. MR 3647790

[SB97] N. I. Shepherd-Barron, *Fano threefolds in positive characteristic*, Compositio Math. **105** (1997), no. 3, 237–265. MR 1440723

[Sch68] Michael Schlessinger, *Functors of Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 208–222. MR 0217093

[Sch04] Stefan Schröer, *Some Calabi-Yau threefolds with obstructed deformations over the Witt vectors*, Compos. Math. **140** (2004), no. 6, 1579–1592. MR 2098403 (2005i:14051)

[Sch12] Peter Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), 245–313. MR 3090258

[Sch13] ______, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77. MR 3090230

[Sch18] ______, *p-adic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 899–933. MR 3966748

[Ser61] Jean-Pierre Serre, *Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47** (1961), 108–109. MR 0132067

[Ser64] ______, *Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 4194–4196. MR 0166197

[Ser79] ______, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979, Translated from the French by Marvin Jay Greenberg. MR 554237

[SGA72] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354653

[SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. MR 0354654 (50 #7132)

[SGA77] *Cohomologie l-adique et fonctions L*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Edité par Luc Illusie. MR 0491704

[SGA03] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129)]. MR 2017446 (2004g:14017)

[Sha99] Igor R. Shafarevich (ed.), *Algebraic geometry. V*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Fano varieties, A translation of ıt Algebraic geometry. 5 (Russian), Ross. Akad. Nauk, Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich. MR 1668575

[Sma57] Stephen Smale, *A Vietoris mapping theorem for homotopy*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 604–610. MR 0087106

[Sno86] Dennis M. Snow, *Cohomology of twisted holomorphic forms on Grassmann manifolds and quadric hypersurfaces*, Math. Ann. **276** (1986), no. 1, 159–176. MR 863714

[Sno88] ______, *Vanishing theorems on compact Hermitian symmetric spaces*, Math. Z. **198** (1988), no. 1, 1–20. MR 938025

[SS91] P. Schneider and U. Stuhler, *The cohomology of p-adic symmetric spaces*, Invent. Math. **105** (1991), no. 1, 47–122. MR 1109620

[Tat71] John Tate, *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289. MR 0306196

[Tau92] Clifford Henry Taubes, *The existence of anti-self-dual conformal structures*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 1, 163–253. MR 1168984

[Tot17] Burt Totaro, *Recent progress on the Tate conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **54** (2017), no. 4, 575–590. MR 3683625

[Tot19] ______, *The failure of Kodaira vanishing for Fano varieties, and terminal singularities that are not Cohen-Macaulay*, J. Algebraic Geom. **28** (2019), no. 4, 751–771. MR 3994312

[Tot20] ______, *Bott vanishing for algebraic surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), no. 5, 3609–3626. MR 4082249

[Tre17] David Treumann, *Complex K-theory of mirror pairs*, arXiv preprint arXiv:1909.03018, 2017.

[Vak06] Ravi Vakil, *Murphy's law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces*, Invent. Math. **164** (2006), no. 3, 569–590. MR 2227692

[Voi02] Claire Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002. MR 1988456

[Voi16] ______, *The Hodge conjecture*, Open problems in mathematics, Springer, [Cham], 2016, pp. 521–543. MR 3526948

[Vos91] Harm Voskuil, *Non-Archimedean Hopf surfaces*, Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2) **3** (1991), no. 2, 405–466. MR 1149806

[War14] Matthew Ward, *Arithmetic Properties of the Derived Category for Calabi-Yau Varieties*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2014, Thesis (Ph.D.)–University of Washington. MR 3271876

[Win04] Jörg Winkelmann, *On manifolds with trivial logarithmic tangent bundle*, Osaka J. Math. **41** (2004), no. 2, 473–484. MR 2069097

[Wł03] Jarosław Włodarczyk, *Toroidal varieties and the weak factorization theorem*, Invent. Math. **154** (2003), no. 2, 223–331. MR 2013783

[Xin16] He Xin, *On W_2-lifting of Frobenius of algebraic surfaces*, Collect. Math. **67** (2016), no. 1, 69–83. MR 3439841

[Zda18] Maciej Zdanowicz, *Liftability of singularities and their Frobenius morphism modulo p^2*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2018), no. 14, 4513–4577. MR 3830576

[Zda21] ______, *Arithmetically rigid schemes via deformation theory of equivariant vector bundles*, Math. Z. **297** (2021), no. 1-2, 361–387. MR 4204695

Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej.

Po uzyskaniu doktoratu w maju 2015 roku na University of California Berkeley przyjąłem pozycję dwuletniego stażu podoktorskiego w ramach międzynarodowego programu *European Post-Doctoral Institute* (EPDI). Pierwszy rok stażu (2015–2016) spędziłem w IM PAN w Warszawie, drugi zaś (2016–2017) w *Institut des Hautes Études Scientifiques* (IHES) w Bures-sur-Yvette pod Paryżem. Od jesieni 2017 pracuję w IM PAN w Warszawie, za wyjątkiem trzymiesięcznego wyjazdu do Bonn na udział w programie *Periods in Number Theory, Geometry and Physics* w Centrum Hausdorffa (HCM) wiosną 2018 oraz na pięciomiesięcznego postdoka w *Mathematical Sciences Research Institute* (MSRI) w Berkeley, USA w ramach programu tematycznego *Derived Algebraic Geometry* wiosną 2019 r.

Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

Osiągnięcia dydaktyczne

- Wykład monograficzny *Introduction to non-Archimedean geometry* na MIM UW (semestr zimowy 2020/21).

  Strona kursu: `http://achinger.impan.pl/lecture20f.html`

  Notatki (dostępne pod adresem `http://achinger.impan.pl/rigid/notes.pdf`) mam nadzieję po ich uzupełnieniu wydać w formie książkowej.

- Opiekun pracy licencjackiej Pawła Poczobuta *An algebraic variant of the Fischer–Grauert theorem* (MIM UW 2020). Praca otrzymała nagrodę główną w V edycji konkursu *Krok w przyszłość* Fundacji mBanku oraz otrzymała wyróżnienie w LXIV edycji Konkursu im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą pracę studencką z matematyki.

- Opiekun pracy magisterskiej Przemysława Grabowskiego *Canonical lifts of Calabi–Yau varieties* (MIM UW 2020). Praca otrzymała II nagrodę w LXIV edycji Konkursu im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą pracę studencką z matematyki.

Opieka nad doktorantami

- Promotor pomocniczy pracy doktorskiej Pawła Lewulisa (Karaska) *Almost primes in different settings* (IM PAN 2017, promotor dr hab. Maciej Radziejewski)

- Promotor pomocniczy pracy doktorskiej Macieja Zdanowicza *Liftability of schemes and their Frobenius morphism* (MIM UW 2017, promotor prof. dr hab. Adrian Langer)

- Promotor pomocniczy Feliksa Rączki (IM PAN 2020–, promotor prof. dr hab. Adrian Langer)

Osiągnięcia organizacyjne

2020– Współorganizator seminarium zakładowego IMPANGA

2019 Organizator konferencji *Wild Ramification and Irregular Singularities*

2019 Współorganizator sesji z geometrii algebraicznej na Jubileuszowym Zjeździe Matematyków Polskich w stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego

2018 Współorganizator semestru tematycznego *Varieties: Arithmetic and Transformations* (grant Simons Foundation dla IMPAN)

2018 Współorganizator szkoły letniej *Arithmetic of Differential Equations* w Łukęcinie

2015–20 Organizator *Junior Algebraic Geometry Seminar* na MIM UW

2015–16 Współorganizator Young Researchers Colloquium w IMPAN

2012–15 Współorganizator Student Algebraic Geometry Seminar na UC Berkeley

2011–13 Współorganizator XX i XXI edycji konferencji *Geometrie Algebrique en Liberté*

Osiągnięcia popularyzujące naukę

2016– Tutor w *Krajowym Funduszu na Rzecz Dzieci*

2012–15 zajęcia dla Berkeley Math Circle, Stanford Math Circle oraz Marin Math Circle

2008–15 współorganizator i/lub prowadzący zajęcia na Wakacyjnych Warsztatach Wielodyscyplinarnych

2007–08 Komisja Zadaniowa Olimpiady Matematycznej

Inne informacje

Wybrane stypendia i nagrody

2021 Finalista konkursu Nagroda Naukowa POLITYKI

2020–23 Stypendium MNiSW dla wybitnych młodych naukowców.

2019 Medal Młodego Uczonego (nagroda przyznawana przez Politechnikę Warszawską)

2016 Nagroda im. Kazimierza Kuratowskiego

2016 Nagroda START Fundacji na rzecz Nauki Polskiej

2015 Kenneth Ribet and Lisa Goldberg Award in Algebra (wyróżnienie rozprawy doktorskiej)

2011–14 Fulbright Science and Technology Award

2010 Druga nagroda w konkursie im. Józefa Marcinkiewicza (wyróżnienie pracy magisterskiej)

Granty badawcze

2019–24 ERC Starting Grant *Homotopy Theory of Algebraic Varieties* (802787 KAPIBARA)

2018–22 NCN SONATA 13 *Deformacje i degeneracje rozmaitości algebraicznych* 2017/26/D/ST1/00913

Członkostwo

2017– Rada Naukowa IM PAN

2018– Zarząd Okręgu Warszawskiego PTM

2020– Jury Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego