Toruń, 10. 02. 2021

prof. dr hab. Mariusz Lemańczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Dyrektor IMPAN
prof. dr hab. Łukasz Stettner

Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego
pt. „Dyskretna analiza harmoniczna"
oraz ocena dorobku naukowego
dr. Bartosza Trojana

Dr Bartosz Trojan uzyskał stopień doktora na Uniwersytecie Wrocławskim w roku 2004, broniąc rozprawy doktorskiej pt. „Hua-harmoniczne funkcje na obszarach Siegela". Po doktoracie przebywał przez 5 latach na stażach podoktorskich kolejno na: Uniwersytecie w Sassari (Włochy), Uniwersytecie w Orleanie i Uniwersytecie w Sydney. Następnie pracował na Uniwersytecie Wrocławskim, Politechnice Wrocławskiej, a od roku 2017 jest zatrudniony w Instytucie Matematycznym PAN. Tematykę badań naukowych habilitanta uważam za naprawdę szeroką: analiza harmoniczna (teoria operatorów singularnych) wraz zastosowaniami, w tym w teorii ergodycznej, teoria prawdopodobieństwa (spacery losowe, twierdzenia graniczne, martyngały), macierze Jacobiego.

1. Ocena osiągnięcia habilitacyjnej dr. B. Trojana. Na osiągnięcie habilitacyjne dr. Trojana składa się (monotematyczny) cykl 5 artykułów, opublikowanych w latach 2015–2020, do których się będę odwoływał, używając wykazu prac z Autoreferatu: prace [H1]-[H5]. Prace zostały opublikowane w renomowanych czasopismach (patrz 2.).

Tematyka rozprawy dotyczy zagadnień dyskretnej analizy harmonicznej, a dokładniej wspólnym mianownikiem jest badanie własności dyskretnych operatorów singularnych, a osiągnięte rezultaty najczęściej są stosowane w dowodach nowych twierdzeń, wpisujących się w zagadnienie tzw. niekonwencjonalnych twierdzeń ergodycznych. W odróżnieniu od dwóch dekad rozwoju teorii niekonwencjonalnych twierdzeń ergodycznych (motywowanych tw. Szemeredy'ego-Furstenberga) i dotyczących zbieżności (najczęściej) w przestrzeni L^2, podejście poprzez własności operatorów singularnych prowadzi do twierdzeń opisujących zbieżności p.w. (powszechnie uznawane za twierdzenia trudniejsze od zbieżności w L^2). Osiągnięte przez dr. Trojana rezultaty są poważne w skali światowej.

Prześledźmy metodę otrzymywania twierdzeń Trojana na przykładzie pracy [H5], najbliższej zainteresowaniom autora recenzji (który nie jest w żadnej mierze specjalistą z zakresu teorii dyskretnych operatorów singularnych). Głównym celem jest udowodnienie twierdzenia typu PNT w wersji p.w. (Thm. A w [H5]), a więc zbieżność p.w. ciągu

$$(A_n(f)(x))_{n\geqslant 1}, \tag{1}$$

gdzie $A_n(f)(x) = \frac{1}{\pi(n)}\sum_{p\leqslant n} f(T^p x)$, gdzie p oznacza liczbę pierwszą, $\pi(n)$ ilość liczb pierwszych $\leqslant n$, T jest automorfizmem przestrzeni probabilistycznej $(X, \mathcal{B}, \mu)$, zaś f należy do przestrzeni Orlicza „bliskiej" L^1, a mianowicie $L(\log L)^2(\log\log L)$. (Sam Bourgain udowodnił powyższe PNT dla $f \in L^2$, Wierdl dla L^r, $r > 1$, a LaVictoire podał kontrprzykład dla L^1 w roku 2011.) Ogólny schemat wykorzystania własności dyskretnych operatorów niesingularnych został wskazany przez Jeana Bourgaina ponad 30 lat temu w dowodach twierdzeń ergodycznych p.w. dla czasów wielomianowych (i liczb pierwszych). Podstawą jest zasada Calderona z 1968 r., która pozwala przenosić zagadnienia na skończonych kawałkach orbit w układzie dynamicznym do modelowego układu translacji na zbiorze liczb całkowitych, na którym rozpatrujemy miarę liczącą. W zależności od zagadnienia należy teraz znaleźć odpowiednią nierówność maksymalną (implikującą twierdzenie, którą chcemy udowodnić). W tym wypadku nierówność (Thm. B w [H5]) ma postać (dla dowolnego $B \in \mathcal{B}$)

$$\mu\left(\{x \in X; \sup_{n\in\mathbb{N}} A_n(\mathbb{1}_B)(x) > \lambda\}\right) = \mathrm{O}(\lambda^{-1}\log^2(e/\lambda))\mu(B)$$

dla wszystkich $0 < \lambda < 1$. Po zastosowaniu zasady Calderona otrzymujemy operator niesingularny

$$A_n(f)(x) := \frac{1}{\pi(n)}\sum_{p\leqslant n} f(x-p)$$

określony dla $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ o skończonym nośniku. I to dla tego operatora pozostaje „jedynie" udowodnić odpowiednią nierówność maksymalną (Corollary 6.5 w [H5])

$$|\{x \in \mathbb{Z};\ \sup_n A_{2^n}(\mathbb{1}_B)(x) < \lambda\}| = \mathrm{O}(\ldots)|B|,$$

gdzie $B \subset \mathbb{Z}$ jest skończony. Nietrudno się domyśleć, że w zasadzie cała praca [H5] jest poświęcona dowodowi tej ostatniej nierówności. Narzędzia, którymi posługuje się habilitant, są niezwykle bogate matematycznie i głębokie. Oprócz samej analizy harmonicznej (rozkłady operatora, mnożnik przybliżający), mamy tu metodę łuków Hardy'ego-Littlewooda, i sporo analitycznej teorii liczb (charaktery Dirichleta, L-funkcje, sumy Gaussa).

Pozostałe prace w większym lub mniejszym stopniu stosują tę samą strategię dowodów. W [H1] udowodniono twierdzenie Cotlara o zbieżności prawie wszędzie transformaty Hilberta $\sum_{1 \leqslant |k| \leqslant n} f(T^k x)k$ dla liczb pierwszych, a więc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|p|\leqslant n} f(T^p x)\frac{\log|p|}{p}$$

istnieje dla p.w. $x \in X$ ($f \in L^r$ dla $r > 1$). W [H2] udowodniono twierdzenie Bourgaina w wersji wielowymiarowej dla przekształceń wielomianowych na $\mathbb{Z}^k$ i skończonej rodziny przemiennych automorfizmów. W [H3] rozpatruje się wielowymiarową wersję, w której argumenty wielomianów na wybranych współrzędnych przebiegają liczby pierwsze. W [H4] zaś rozpatruje się operatory średniujące postaci

$$A_n(f)(x) = \frac{1}{|Q \cap [1, n]|} \sum_{p \leqslant n, p \in Q} f(T^{P(p)}x),$$

gdzie $P \in \mathbb{Z}[t]$, Q zaś jest podzbiorem zbioru liczb pierwszych o relatywnej gęstości zero.

Podsumowując, dr B. Trojan zajmuje się niezwykle żywymi i głębokimi zagadnieniami dyskretnej analizy harmonicznej, wymagającymi dogłębnej znajomości sporych obszarów współczesnej matematyki (poziom naukowy rozprawy uznaję za bardzo wysoki). Osiągnięte rezultaty zostały wykorzystane dla uzyskania dowodów nowych niekonwencjonalnych twierdzeń ergodycznych. Osobiście na mnie największe wrażenie zrobiła praca [H5]. Postęp, jaki się dokonał dzięki osiągnięciom dr. B. Trojana, należy uznać za istotny w skali światowej. Jedyna uwaga krytyczna, jaka może dotyczyć całej tej tematyki, to fakt, że metody powyższe prowadzą do konkluzji o istnieniu granic, ale (ze względu na użyte warunki typu Cauchy'ego) nie potrafią nic powiedzieć o samej granicy, której znajomość jest w teorii ergodycznej często bardzo ważna.

2. Ocena pozostałego dorobku naukowego. Dorobek habilitanta poza rozprawą obejmuje ponad 20 artykułów. Prace dr. Trojana publikowane są często międzynarodowych czasopism matematycznych najwyższej półki, a w zasadzie wszystkie prace opublikowane zostały w czasopismach o wysokiej międzynarodowej renomie. Spójrzmy jedynie na tę imponującą listę: Inventiones Math., Advances Math., Mathematische Annalen, Amer. J. Math. J. Functional Anal., Transactions AMS, International Math. Research Notices, Math. Research Letters, Stochastic Process Appl., J. Fourier Anal. Appl., Proceedings AMS.

Zgodnie z autorferatem prace te można podzielić tematycznie na pięć dużych bloków: dyskretna analiza harmoniczna, analiza na budynkach afinicznych, wielomiany ortogonalne i operatory Jacobiego, jądra ciepła i spacery losowe, twierdzenia graniczne dla spacerów losowych. Bogactwo tematyki badawczej i osiągany poziom wyników naukowych można ocenić jako zdecydowanie wyróżniające.

Lista współpracowników dr. Trojana jest dość długa i można znaleźć na niej samego (ś.p.) E.M. Steina, ale i innych matematyków o światowej renomie (M. Mirek).

Wg MathSciNet prace dr. B. Trojana są cytowane 117 razy (przez 82 autorów). Oceniłbym to jako wskaźnik dobry, najwięcej cytowań (26) ma opublikowana w roku 2017 w Inventiones Math. wspólna praca z M. Mirkiem i E.M. Steinem o średniujących operatorach typu Radona, wynik oczywiście ponadprzeciętny, biorąc pod uwagę przedział czasowy.

3. Udział w międzynarodowym życiu matematycznym, nagrody, osiągnięcia organizacyjne i dydaktyczne dr. B. Trojana. Jak już wcześniej wspomniałem habilitant odbył 3 zagraniczne staże podoktorskie w latach 2004-2009. Brał udział w kilkunastu konferencjach międzynarodowych. Był też wykonawcą w czterech grantach (KBN, NCN). W latach 2013-17 prowadził seminarium doktoranckie. Na wyróżnienie zasługuje fakt bycia promotorem pomocniczym w dwóch zakończonych przewodach doktorskich. W roku 2020 dr B. Trojan został laureatem programu Gaspar Monge Visiting Professor (Palaiseau).

4. Konkluzja

W mojej ocenie osiągnięcie habilitacyjne oraz pozostały dorobek naukowy dr. Bartosza Trojana z wyraźnym naddatkiem wypełniają wymagania ustawowe i zwyczajowe dla nadania stopnia naukowego doktora habilitowanego.