dr hab. Joanna Kułaga-Przymus, prof UMK
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 12 lutego 2021

Ocena dorobku naukowego
doktora Bartosza Trojana
w związku z postępowaniem habilitacyjnym w
Instytucie Matematycznym PAN

Dr Bartosz Trojan uzyskał tytuł doktora na Uniwersytecie Wrocławskim, w 2004 roku. Odbył trzy staże podoktorskie: Sassari, Włochy (2004-2005), Orlean, Francja (2005-2006) oraz Sydney, Australia (2006-2009). Następnie pracował na Politechnice Wrocławskiej i (przez rok) na Uniwersytecie Wrocławskim. Obecnie jest zatrudniony w IM PAN na stanowisku adiunkta.

Ocena osiągnięcia habilitacyjnego Podstawą wniosku o nadanie tytułu doktora habilitowanego jest cykl pięciu artykułów zatytułowany **Dyskretna analiza harmoniczna**, opublikowany w czasopismach o przynajmniej bardzo dobrym poziomie:
[**H1**] M. Mirek, B. Trojan, *Cotlar's ergodic theorem along the prime numbers*, Journal of Fourier Analysis and Applications 21, 822-848 (2015)
[**H2**] M. Mirek, B. Trojan, *Discrete maximal functions in higher dimensions and applications to ergodic theory*, American Journal of Mathematics 138, 1495-1532 (2016)
[**H3**] B. Trojan, *Variational estimates for discrete operators modeled on multi-dimensional polynomial subsets of primes*, Mathematische Annalen 374, 1597-1656 (2019)
[**H4**] B. Trojan, *Variational estimates for operators on some this subsets of primes*, Mathematical Research Letters 27, 591-628 (2020)
[**H5**] B. Trojan, *Endpoint estimates for the maximal function over prime numbers*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 25, 2123-3153 (2019)
W dwóch pierwszych pracach z tej listy, wspólnych z Mariuszem Mirkiem, wg oświadczeń współautora, udział habilitanta został oceniony na 50%.

Tematyka rozprawy dotyczy dyskretnych operatorów osobliwych. Ta klasyczna tematyka, zapoczątkowana została już przez Hilberta w latach 20-tych ubiegłego wieku. Podstawowa różnica pomiędzy analizą harmoniczną ciągłą i dyskretną pojawia się na poziomie funkcji maksymalnej związanej z operatorami Radona. W wersji ciągłej mamy do czynienia ze słabym typem (1,1) – w połączeniu z oszacowaniami na L^2 oraz odpowiednią aproksymacją pozwala to otrzymać oszacowania na L^p dla $p \in (1,2)$. Z drugiej strony, wiadomo, ze operator maksymalny Radona w wersji dyskretnej nie jest słabego typu (1,1). Z tego powodu oszacowania w ℓ^p dla $p \geqslant 2$ wymagały nowych pomysłów. Istotną rolę w teorii odgrywają również operatory osobliwe badane przez Ionescu i Waingera (są to przesunięcia o wielomiany przyjmujące wartości całkowite, bez wyrazu wolnego), które są ograniczone w ℓ^p dla $p \in (1,\infty)$ (na przestrzeni funkcji o skończonym nośniku). Tu kluczowa okazała się subtelna metoda wyboru ułamków a/q tak, by powstały mnożnik pozwalał wykorzystać silną ortogonalność. Można powiedzieć, że te wyniki stanowią punkt wyjścia dla dr. Trojana, który analizując operatory dyskretne wypracowuje niezbędne metody, nowe w stosunku do tych stosowanych dla operatorów ciągłych. Uzyskuje on w ten sposób szereg ciekawych wyników, które postaram się omówić za chwilę. Duże wrażenie wywarła na mnie biegłość techniczna kandydata oraz mnogość zastosowanych metod, z których część przywołam poniżej. Opis uzyskanych wyników w autoreferacie jest klarowny i szczegółowy, uwzględniono też kontekst historyczny. Dużą wartość prezentacji stanowi również porównanie zakresu metod i strategii zastosowanych w pracach z metodami, które nie zostały wykorzystane, a także uwypuklenie roli ich - często niełatwej i bardzo technicznej - modyfikacji do potrzeb badanych obiektów. Niewątpliwie habilitant jest samodzielnym, twórczym matematykiem.

Pierwsza z prac wchodzących w skład rozprawy [H1] dotyczy uogólnienia twierdzenia Cotlara dla tzw. przyciętych transformat Hilberta, a więc bada się średnie z wagami logarytmicznymi. Oryginalne twierdzenie Cotlara dotyczy zbieżności prawie wszędzie średnich postaci $\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N}\frac{f(S^n x)}{n}$, gdzie $f \in L^r(X,\mu)$ dla $r \in [1,\infty)$, a przestrzeń (X,μ) jest σ-skończona. Dr Trojan dowodzi analogicznego twierdzenia wzdłuż liczb pierwszych, dla $r \in (1,\infty)$, dokładniej wykazuje zbieżność średnich

$$\sum_{1<|p|\leqslant N} f(S^p x)\frac{\log|p|}{p}, \tag{1}$$

gdzie sumowanie odbywa się po obciętym zbiorze liczb pierwszych oraz jego symetrycznym odbiciu względem zera. Dzięki metodzie transferencji Calderóna, zagadnienie to można sprowadzić do pytań związanych z układem modelowym na $\mathbb{Z}$ i badania ogólnych przyciętych operatorów osobliwych zadanych jądrem Calderóna-Zygmunda. Trojan pokazał, że stowarzyszona z tym operatorem funkcja maksymalna jest ograniczona na ℓ^r oraz odpowiednie granice punktowe ciągu przyciętych operatorów istnieją i są równe operatorowi nieprzyciętemu dla funkcji o skończonym nośniku (na $\mathbb{Z}$). Dla uzasadnienia punktowej zbieżności konieczne jest zbadanie półnormy oscylacyjnej. Kluczowe trudności dla $r = 2$ są związane z badaniem własności mnożników – dokonano tutaj adaptacji metody łuków Hardy'ego-Littlewooda oraz wykorzystano nierówność Vinogradova. Dla $r \neq 2$ okazało się, że metody obecne w literaturze nie dają się zaadaptować, co zaowocowało uzupełnieniem wcześniejszego rozumowania Wierdla z roku 1988 (które zawierało błąd – dający się naprawić, ale nie we wszystkich sytuacjach) oraz uproszczeniem metody pochodzącej od Bourgaina (opisanej w serii trzech prac z lat 1988-89), którego należy uznać za jednego z ojców dyskretnej analizy harmonicznej.

Druga z prezentowanych prac [H2] dotyczy wielowymiarowych średnich ergodycznych, uogólniających twierdzenie Bourgaina. Dokładniej, dla przestrzeni σ-skończonej (X, μ) oraz przekształceń $S_1, \ldots, S_d$ komutujących, odwracalnych i zachowujących miarę oraz dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$, $p > 1$ pokazano, że granica średnich

$$\frac{1}{N^k} \sum_{n \in \mathbb{N}^k \cap [1,N]^k} f(S^{P_1(n)} S^{P_2(n)} \ldots S^{P_d(n)}), \tag{2}$$

gdzie P_j jest wielomianem o wartościach całkowitych na $\mathbb{Z}^k$, istnieje prawie wszędzie. Metody z pracy [H2] są nowe – zarówno w stosunku do pracy Ionescu, Magyara, Steina oraz Waingera (2007), w której wykazano zbieżność punktową powyższych średnich dla wielomianów co najwyżej kwadratowych, jak i w stosunku do pracy Bourgaina (1989). Zbieżność punktowa wskazanych średnie była badana wcześniej (2007) przez Ionescu, Magyara, Steina oraz Waingera dla wielomianów co najwyżej kwadratowych. Trojan oraz Mirek oszacowali normę w L^p funkcji maksymalnej, a dalej kluczowym pomysłem było badanie półnormy wariacyjnej dla średnich, które uogólniło rezultaty Bourgaina na wyższe wymiary. Bezpośrednią inspiracją była tutaj praca Krausego (2014), dotycząca szybkiej zbieżności wielomianowych średnich ergodycznych. Otrzymane szacowania są jednostajne ze względu na współczynniki przekształceń wielomianowych. Warto podkreślić, że w wielu miejscach konieczna była istotna adaptacja metod będących punktem wyjścia albo wręcz znalezienie nowego podejścia. Dla przykładu, potrzebne było uogólnienie wyników Bourgaina na przypadek wielowymiarowy, co udało się osiągnąć przy pomocy metod zainspirowanych pracą Ionescu i Waignera (2006): ograniczoność na ℓ^p osobliwego operatora Radona wykazano rozbijając go na dwie części, z których pierwsza jest kontrolowana na ℓ^p, a druga na ℓ^2 i dodatkowo wykorzystując odpowiednią metodę przybliżeń.

W samodzielnej pracy [H3] dr Trojan dowodzi uogólnień punktowych twierdzeń ergodycznych Birkhoffa oraz Cotlara do wielowymiarowych podzbiorów liczb pierwszych zadanych przez rodziny przekszałceń wielomianowych. Uogólnienie twierdzenia Birkhoffa polega na zamianie we wzorze (2) argumentu n dla wielomianów należącego do zbioru $\mathbb{N}^k \cap [1, N]^k$ na argument postaci (n, p), gdzie n jest wektorem liczb naturalnych, p wektorem liczb pierwszych o łącznej długości k, a cała suma jest podzielona przez odpowiednią wagę daną przez liczbę takich wektorów w kostce $[1, N]^k$. Ponieważ sumy wzdłuż liczb pierwszych są nieregularne, wygodniej jest pracować z odpowiednimi średnimi ważonymi (wagi odpowiadają gęstości liczb pierwszych). Aby uogólnić twierdzenie Cotlara, na podobnej zasadzie buduje się średnie uogólniające (1), przy czym tu już jest potrzebne jądro Calderóna-Zygmunda, które spełnia odpowiednią nierówność różniczkową oraz warunek skracań. Kluczową rolę w dowodach odgrywają szacowania w ℓ^p dla r-półnorm wariacyjnych odpowiednich operatorów typu Radona dla $p > 1$ oraz $r > 2$. Temat ten (pojawiający się już w pracy [H2]) był podejmowany również przez innych autorów, był też tematem dalszych badań dr. Trojana, które nie wchodzą w skład głównego osiągnięcia habilitacyjnego. Stosowane tutaj metody wymagały dużej biegłości oraz pomysłowości od autora. Półnorma r-wariacyjna została podzielona na długie i krótkie wariacje, z których te drugie (przy odpowiednim doborze parametrów) są stosunkowo łatwe do kontrolowania. Do kontroli długich wariacji Trojan użył metod rozkładu jedności, wypracowanych wspólnie z Mirkiem oraz Steinem. To pozwoliło na kontrolę osobno części asymptotycznej mnożnika oraz, osobno, części oscylującej. Do części oscylującej, zastosowano nierówność Weyla-Vinogradova z logarytmiczną stratą w połączeniu z oszacowaniem na normę ℓ^p na mnożniki typu Ionescu-Wainger. Część asymptotyczą udało się kontrolować przy pomocy metody łuków Hardy'ego-Littlewooda.

W pracy [H4], Trojan dowodzi rozszerzeń punktowych twierdzeń Birkhoffa oraz Cotlara na pewne cienkie zbiory liczb pierwszych. Praca ta rozszerza wyniki Mirka (2017) na szerszą klasę zbiorów. Przypomnijmy, że podzbiór P liczb pierwszych jest cienki, o ile średnia asymptotyczna liczba elementów ze zbioru P względem całego zbioru liczb pierwszych jest zerowa. W pracy [H4] zakłada się dodatkowe techniczne własności zbioru P. Podstawowym przykładem jest tutaj zbiór dany jako wszystkie liczby pierwsze postaci $\lfloor h(n) \rfloor$, gdzie h jest pewną wolnozmieniającą się funkcją, np. $x^c \log^A(x)$ dla $c \in [1, 2)$ oraz $A > 0$. Główną rolę w dowodzie zbieżności punktowej znów odgrywają oszacowania na r-wariacyjną półnormę dla operatorów Radona. Wariacje, podobnie jak w pracy [H2], zostały podzielone w odpowiedni sposób na krótkie i długie, a następnie te dwa typy potraktowano oddzielnie. Dla krótkich wariacji korzysta się z oszacowań pewnych sum wykładniczych wzdłuż P oraz twierdzenia o liczbach pierwszych lub twierdzenia Mertensa. Dla zbadania zachowania długich wariacji zbadano różnicę normy operatora modelowanego wzdłuż P oraz odpowiednio dobranego operatora modelowanego wzdłuż liczb pierwszych, którą udało się oszacować przy pomocy twierdzenia Plancherela. To pozwoliło sprowadzić sytuację do tej z pracy [H3]. Aby oszacować występujące w rozumowaniu sumy wykładnicze zastosowano tożsamość Vaughana w połączeniu z lematem van der Corputa.

Kontekst pracy [H5] różni się od pozostałych tu omawianych. Przestrzeń (X, μ) jest teraz probabilistyczna. Dr Trojan wykazuje zbieżność prawie wszędzie dla średnich ergodycznych wzdłuż liczb pierwszych dla funkcji f pochodzących z klasy Orlicza $L(\log L)^2(\log\log L)(X, \mu)$. Jako pierwszy średnie ergodyczne wzdłuż liczb pierwszych badał Bourgain, który rozpatrywał je w sytuacji przestrzeni L^2, natomiast zbieżność dla $p > 1$ udowodnił Wierdl (obie prace pochodzą z lat 80-tych ubiegłego wieku). Dopiero LaVictoire, bazując na metodach Buczolicha oraz Mauldaina, w 2011 roku wykazał, że dla $p = 1$ twierdzenie nie zachodzi. Dr Trojan w swojej pracy wskazuje przestrzeń Orlicza blisko przestrzeni L^1, w której oczekiwana zbieżność mimo wszystko ma miejsce dla każdej funkcji. Nowatorskość zastosowanego podejścia polega m.in. na wykazaniu restrykcyjnych oszacowań typu Orlicza w miejsce braku słabego typu (1,1).

Ocena pozostałego dorobku publikacyjnego Pozostały dorobek oraz aktywność naukową dr. Trojana oceniam równie wysoko. Po doktoracie obronionym w 2004 roku, dr Bartosz Trojan napisał jeszcze 15 prac. Jedna z nich jest samodzielna, pozostałe są współautorskie (z różnymi współautorami, zarówno z kraju, jak i zagranicy). Ze względu na bogactwo dorobku, nie sposób omówić tutaj wszystkie z nich. Prace te - jak wskazano w autoreferacie - dotyczą szerokiego zakresu tematów, który można podzielić na następujące cztery grupy: dyskretna analiza harmoniczna, analiza na budynkach afinicznych, wielomiany ortogonalne i operatory Jacobiego oraz jądra ciepła i spacery losowe. Szczególną uwagę zwraca wysoko cytowana praca [P6], wspólna z Mirkiem oraz Steinem, opublikowana w *Inventiones Mathematicae*. Dotyczy ona szacowań w $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dla $p \in (1, \infty)$ funkcji maksymalnych związanych z wielomianowymi przyciętymi transformatami Radona. Łącznie, dr Bartosz Trojan jest autorem lub współautorem 30 prac (oprócz artykułów już opublikowanych, 7 kolejnych zostało wysłanych do recenzji). Można oczekiwać, że prace te również zostaną przyjęte do druku w bardzo dobrych czasopismach. Kandydat był promotorem pomocniczym w dwóch przewodach doktorskich (w latach 2015 oraz 2017), owocem czego były również wspólne prace z doktorantami, a współpraca z jednym z nich nadal trwa (czego dowodem są wspólne prace oraz preprinty z G. Świderskim z 2020 roku).

Dane naukometryczne W dniu wszczęcia postępowania liczba cytowań (wg bazy Web of Science) prac dr. Trojana wynosiła 95 (z czego 60 bez autocytowań), zaś h-indeks był równy 6. Wg bazy JCR, sumaryczny IF dr. Bartosza Trojana wynosił wówczas 27,178. Na dzień dzisiejszy liczba cytowań wg bazy WoS wzrosła do 107 (z czego 81 bez autocytowań), a h-indeks do 7. Spośród wszystkich cytowań, 98 (z czego 75 bez autocytowań) pochodzi z roku 2005[1] lub lat późniejszych i widać że od roku 2016 liczba cytowań w danym roku systematycznie rośnie. Mathematical Reviews w dniu pisania tej recenzji podaje informację o 117 cytowaniach przez 82 autorów prac Bartosza Trojana, zaś według serwisu Google Scholar liczba cytowań wynosi 248. Uważam, że są to wskaźniki bardzo dobre (zwłaszcza jeśli chodzi

[1] Przypomnijmy, że habilitant uzyskał tytuł doktora w roku 2004.

o ostatnich kilka lat) i widać wyraźnie, że dorobek dr. Trojana, potraktowany jako całość, jest rozpoznawalny na arenie międzynarodowej.

Udział w międzynarodowym życiu matematycznym, nagrody, osiągnięcia organizacyjne i dydaktyczne Dr Bartosz Trojan jest również aktywny na polu organizacyjnym, w latach 2013-17 prowadził seminarium naukowe dla doktorantów i pracowników naukowych, którego tematyka koncentrowała się wokół prac Bourgaina. Odzwierciedlenie tej działalności jest widoczne gołym okiem w jego dorobku publikacyjnym. Habilitant brał udział w kilkunastu konferencjach międzynarodowych. Był też wykonawcą w czterech grantach (KBN, NCN). Recenzował artykuły dla 9 uznanych czasopism naukowych. W 2020 dr Bartosz Trojan został laureatem programu Gaspar Monge Visiting Professor na Politechnice w Palaiseau (Francja), wyjazd z uwagi na sytuację epidemiczną został przełożony. W związku z tym wyróżnieniem prowadził już jednak kurs z dyskretnej analizy harmonicznej dla studentów studiów magisterskich i doktorantów uniwersytetów paryskich, co uzupełnia jego doświadczenie dydaktyczne z kraju (dotyczące głównie kursów z zakresu informatyki).

Konkluzja Podsumowując, uważam, że osiągnięcie habilitacyjne dr Bartosza Trojanam jego pozostały dorobek oraz aktywność naukowa spełniają z naddatkiem wszystkie ustawowe wymogi stawiane kandydatom do habilitacji. Jestem przekonana, ze stanowią one znaczny wkład w rozwój matematyki, a habilitant wykazuje się istotną aktywnością naukową. Z pełnym przekonaniem rekomenduję nadanie dr. Trojanowi stopnia doktora habilitowanego.

J. Kuraga-Przymus