Streszczenie rozprawy doktorskiej

Some applications of set theory in Banach spaces and operator algebras

Autor: Damian Głodkowski

Rozprawa poświęcona jest wybranym problemom w analizie funkcjonalnej, których rozwiązania opierają się na metodach teorii mnogości i topologii. Omawiamy cztery tematy obejmujące zagadnienia takie jak niezmienniki przestrzeni Banacha, zbieżność miar Radona oraz istnienie zanurzeń pewnych C*-algebr w algebrę Calkina.

W pierwszej części rozprawy badamy σ-ideały podzbiorów przestrzeni Banacha generowane przez hiperpłaszczyzny i analizujemy ich standardowe niezmienniki kardynalne: addytywność, liczba pokryciowa, jednorodność i kofinalność. Obliczamy ich wartości dla ośrodkowych przestrzeni Banacha oraz pokazujemy, że niesprzecznie zależą one tylko od gęstości dla wszystkich przestrzeni Banacha. Pozostałe pytania sprowadzają się do rozstrzygnięcia, czy dla każdej nieośrodkowej przestrzeni Banacha X następujące zdania są dowodliwe w ZFC:

- X można pokryć przy pomocy ω_1 hiperpłaszczyzn,
- wszystkie podzbiory X mocy mniejszej niż $\mathrm{cf}([\mathrm{dens}(X)]^\omega)$ można pokryć przeliczalnie wieloma hiperpłaszyznami.

Pokazujemy także, że odpowiedzi na powyższe są twierdzące, jeśli ograniczymy się do jednej z wielu dobrze zbadanych klas przestrzeni Banacha. Pierwsze pytanie związane jest z problemem, czy każda zwarta przestrzeń Hausdorffa z małą przekątną jest metryzowalna, a drugie z dużymi liczbami kardynalnymi.

Drugi temat dotyczy przestrzeni Banacha funkcji ciągłych na przestrzeniach zwartych. Pokazujemy, że jeśli K jest ośrodkową i spójną przestrzenią zwartą, $C(K)$ ma mało operatorów (tzn. każdy ograniczony operator liniowy $T\colon C(K) \to C(K)$ jest postaci $T(f) = fg + S(f)$, gdzie S jest słabo zwarty oraz $g \in C(K)$) oraz przestrzeń $C(K)$ jest izomorficzna z przestrzenią $C(L)$, to K i L są homeomorficzne z dokładnością do skończenie wielu punktów. Następnie, dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ konstruujemy, przy założeniu zasady karo Jensena ($\diamondsuit$), przestrzeń zwartą K mającą opisane powyżej własności oraz wymiar pokryciowy równy n. Wnioskujemy, że jeśli L jest przestrzenią zwartą taką, że $C(K)$ i $C(L)$ są izomorficzne, to $\dim L = n$.

Trzeci temat dotyczy teorio-miarowych własności algebr Boole'a oraz powiązanych z nimi przestrzeni Banacha. Definiujemy σ-scentrowane pojęcie forcingu, które forsuje istnienie algebry Boole'a z własnością Grothendiecka i bez własności Nikodyma. W szczególności dowodzimy, że istnienie takiej algebry jest niesprzeczne z negacją hipotezy continuum. Skonstruowana przez nas algebra składa się z borelowskich podzbiorów zbioru Cantora oraz ma moc równą ω_1. Pokazujemy też, jak usprawnić konstrukcję takiej algebry otrzymanej przez Talagranda przy założeniu hipotezy continuum korzystając z naszej metody.

Ostatnia część rozprawy poświęcona jest algebrze Calkina $\mathcal{Q}(\ell_2)$ tj. algebrze ograniczonych operatorów na ℓ_2 podzielonej przez ideał operatorów zwartych. Pokazujemy, że w modelu Cohena nie istnieje *-zanurzenie algebry $\ell_\infty(\mathcal{Q}(\ell_2))$ w algebrę $\mathcal{Q}(\ell_2)$. Wnioskujemy z tego, że w modelu Cohena korona stabilizacji algebry $\mathcal{Q}(\ell_2)$ nie jest izomorficzna z $\mathcal{Q}(\ell_2)$.