Streszczenie

W rozprawie zajmujemy się nowym podejściem do funkcji harmonicznych na przestrzeniach metrycznych z miarą używając przy ich definiowaniu własności wartości średniej. Badamy trzy typy funkcji i związanych z nimi zagadnień: funkcje silnie harmoniczne, funkcje p-harmoniczne i ich nieliniową asymptotyczną własność wartości średniej oraz funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne. Badania powyższych pojęć prezentujemy odpowiednio w trzech przypadkach: ważonych przestrzeni Euklidesowych, grup Carnot–Carathéodory'ego i przestrzeni metrycznych z miarą podwajającą.

Na początku charakteryzujemy funkcje silnie harmoniczne określone na otwartych podzbiorach przestrzeni Euklidesowej z ważoną miarą Lebesgue'a oraz z metryką indukowaną przez normę. Warunkiem koniecznym na silną harmoniczność funkcji jest jej bycie słabym rozwiązaniem układu eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych, którego liczba równań zależy od regularności wagi. Warunek dostateczny jest udowodniony przy użyciu wzoru Pizzettiego i stanowi, że każde rozwiązanie wyżej wymienionego układu równań jest silnie harmoniczne. Wzór Pizzettiego jest prawdziwy tylko dla funkcji analitycznych, dlatego zakładamy analityczną regularność wagi. Jedną z konsekwencji przeprowadzonej analizy są wyniki o regularności funkcji silnie harmonicznych. Dowodzimy, że dla wagi z przestrzeni Sobolewa funkcje silnie harmoniczne należą do przestrzeni Sobolewa oraz, że dla analitycznej wagi funkcje silnie harmoniczne również są analityczne. Przeprowadzona analiza została zilustrowana w przypadku planarnym z metryką indukowaną przez normę l^p. Dla $p = 2$ oraz gładkiej wagi przedstawiamy w możliwie najprostszy sposób wyżej wymieniony układ równań różniczkowych cząstkowych charakteryzujący harmoniczność. Ponadto, dla stałej wagi oraz pozostałych wykładników $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ wykazujemy, że wymiar przestrzeni funkcji silnie harmonicznych wynosi 8.

W rozdziale trzecim charakteryzujemy ciągłe rozwiązania lepkościowe równania znormalizowanego subeliptycznego p-Laplasjanu na grupach Carnot jako funkcje o asymptotyczej p-własności wartości średniej w sensie lepkościowym.

W ostatniej części pracy badamy funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne na przestrzeniach metrycznych z lokalnie podwajającą miarą. Używając metody uśredniania dowodzimy, że funkcje ze skończoną amv-normą należą do ułamkowych przestrzeni Hajłasza–Sobolewa oraz, że funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne są α-Hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $0 < \alpha < 1$. Konsekwencją zastosowania metody uśredniania jest udowodnienie lokalnej ciągłości Lipschitzowskiej dla funkcji silnie harmonicznych przy założeniach słabszych niż znane w literaturze. Ponadto, dowodzimy skończoności wymiaru przestrzeni funkcji silnie harmonicznych o wzroście wielomianowym o ile miara ma własność zanikania na pierścieniach. Twierdzenie Blaschke–Privaloffa–Zaremby zostało uogólnione na grupę Heisenberga $\mathbb{H}_1$. Używając metody blow-up'ów na przestrzeni metrycznej wykazujemy, że funkcje styczne do tych ze skończoną amv-normą są silnie harmoniczne na przestrzeni stycznej. W ważonych przestrzeniach Euklidesowych, gdy waga jest lokalnie ciągła w sensie Lipschitza, dowodzimy, że funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne są rozwiązaniami eliptycznego równania różniczkowego cząstkowego.