Henryk Żołądek
Uniwersytet Warszawski

Opinia o rozprawie habilitacyjnej "Równania różniczkowe dotyczące przejść fazowych" dra Panayotisa Smyrnelisa

Dr Smyrenelis ukończył studia na Uniwersytecie Piotra i Marii Curie (Paris 6) w 1997 roku a rozprawę doktorską obronił w 2012 roku w Salonikach. Przebywał w wielu ośrodkach naukowych, w tym dwuktrotnie w Instytucie Matematyczntym Polskiej Akademii Nauk; prawdopodobnie dlatego właśnie w tym ostatnim ośrodku przedstawił rozprawę habilitacyjną, na którą składa się sześc opublikowanych prac. Prawdopodobnie mijaliśmy się gdzieś, ale sobie go nie przypominam; za to znam jego współautora, M. Kowalczyka.

Z *MathSciNet* można dowiedzieć się, żę habilitant opublikował 19 prac (w autoreferacie znajdujemy 20 prac), które były cytowane 64 razy. Te prace ukazały się w dosyć prestiżowych czasopismach z matematyki stosowanej, a dwie prace , powstałe na podstawie rozprawy doktorskiej, były opublikowane w *Electronic Journal of Differential Equations* i w *Proceedings of the American Mathematical Society.* Większość prac jest współautorskich.

Rozprawa jest poświęcona dowodzeniu istnienia specjalnych rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, które w pewien sposób są związane z przejściami fazowymi.

Najprostsza taka sytuacja to zachowawcze równanie Newtona z jednym stopniem swobody, czyli

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -V'(u),$$

gdzie potencjał $V(u)$ posiada lokalne maksima; (dr Smyrnelis pisze $d^2u/dx^2 = W'(u)$). Wiadomo jak tutaj wygląda portret fazowy, t.j. w przestrzni fazowej $\mathbb{R}^2 = \{(u,v) = (u, du/dx)\}$: są to poziomice energii

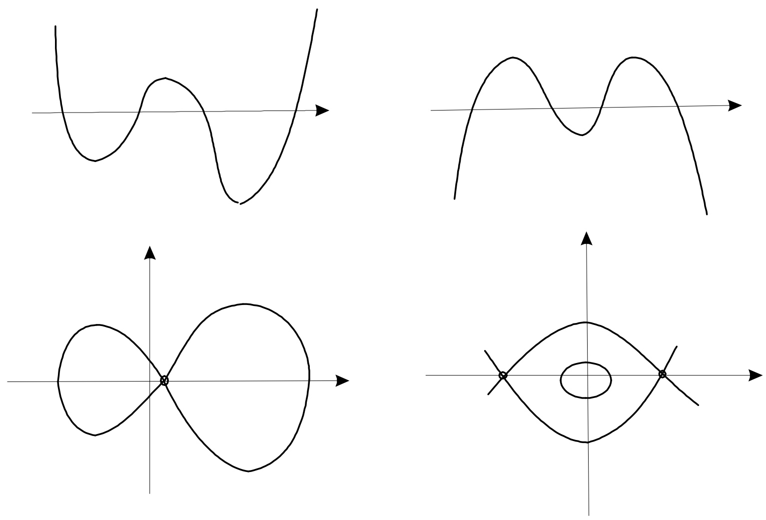
$$C_E = \left\{ \frac{1}{2}v^2 + V(u) = E \right\}.$$

Jeśli wartość krytyczna E_0 potencjału, lokalne maksimum, jest przyjmowana tylko dla jednego punktu krytycznego u_0, to poziomica C_{E_0} składa się z siodła $(u_0, 0)$ i dwóch pętli jego separatrys, tzw. homoklinicznych trajektorii. Jeśli mamy dwa (lub więcej) punkty krytyczne u_1 i u_2 z wartością krytyczną E_0, to poziomica C_{E_0} zawiera połączenia siodeł $(u_1, 0)$ i $(u_2, 0)$, odpowiadające trajektoriom homoklinicznym. Inne poziomice C_E to albo centra $(u_j, 0)$ (odpowiadające lokalnym minimom V) i krzywe zamknięte, odpowiadające rozwiązaniom okresowym. Przedstawiam to na załączonym rysunku (którego brak w pracach i autorefereacie).

Związek z fizyką przejść fazowych (których chyba habilitant do końca nie rozumie) polega na rozważaniu funkcjonału działania

$$S(\gamma) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} (u'(x))^2 - V(u(x)) \right) dx$$

(gdzie $\frac{1}{2}(u')^2 - V(u)$ jest funkcją Lagrange'a) na przestrzeni dróg (fizycznych konfiguracji) $\gamma : [a,b] \ni x \longmapsto u(x) \in \mathbb{R}$ z ustalonymi końcami. Habilitant (za innymi)



nazywa go energią Allena–Cahna. Tutaj, w przypadku prawego rysunku, mamy ekstremalne krzywe (konfiguracje) odpowiadające położeniom równowagi $u(x) \equiv u_1$ i $u(x) \equiv u_2$ (dwie niestabilne fazy). Rozwiązanie homokliniczne realizuje przejście pomiędzy tymi fazami.

W pracach wchodzących w skład rozprawy powyższa sytuacja jest uogólniana w kilku kierunkach:

— układ Newtona z wieloma stopniami swobody

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\nabla V(u), \;\; u : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n,$$

— równanie cząstkowe

$$\Delta u = -\nabla u, \;\; u : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n,$$

— równania wyższych rzędów, np. równanie Fishera–Kołmogorowa

$$\frac{d^4u}{dx^4} = \beta\frac{d^2u}{dx^2} + u^3 - u, \;\; u : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

— równania z małym parametrem ε, np.

$$\varepsilon^2 u'' = \mu(x)\, u - u^3 - \varepsilon a f(x), \;\; u : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}. \tag{0.2}$$

Przechodzę do omówienia prac wchodzących w skład rozprawy.

W pracy (S1) "On minimizers of the Hamiltonian system $u'' = \nabla W$ and on the existence of heteroclinic, homoclinic and periodic orbits", *Indiana University Mathematical Journal* **95** (2016), 1503–1524 (z P. Antopoulosem) dowodzi się istnienia heteroklinicznych, homoklinicznych i okresowych rozwiązań układu

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \nabla W(u), \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

w z grubsza następujących sytuacjach.

Niech $\Omega = \{W > 0\}$. Zakłada się, że:

(H1) brzeg $\partial\Omega$ jest rozłączną sumą dwóch zbiorów zwartych A^+ i A^-, (H2) $\mathbb{R}^m \diagdown \Omega$ jest rozłączną sumą dwóch zbiorów F^+ i F^- i $\partial F^{\pm} = A^{\pm}$.

W Twierdzeniu 4.2 dowodzi się istnienia orbit łączacych A^+ a A^-. Dowód polega na wykazaniu istnienia trajektorii ekstremalnych funkcjonału działania.

Założenia do następnych twierdzeń to:

(He) $\nabla W(u) = 0$ na A^*,

(Ho) $\nabla W(u) \neq 0$ na A^*, gdzie A^* to A^+ lub A^-.

W Twierdzeniu 5.2, przy założeniu (He), dowodzi się istnienia heteroklinicznych połączeń A^+ z A^-.

W Twierdzeniu 5.4, przy założeniu (Ho), dowodzi się istnienia homoklinicznych połączeń.

W Twierdzeniu 5.6, przy założeniu (Ho), dowodzi się istnienia trajektorii okresowych.

W samodzielnej pracy (S2) "Minimal homoclinics for a class of fourth order O. D. E. systems", *Nonlinear Analysis* **173** (2018), 154–163, rozważa się następujące równanie

$$u^{(4)} + W'_u - W''_{uv}u' - W''_{vv}u'' = 0,\ u(x) \in \mathbb{R}^m,$$

którego szczególnym przypadkiem jest powyższe równanie Fishera–Kołmogorowa (0.1). Tutaj $W(u,v) = W(u,u')$ jest nieujemną funkcją spełniającą trzy założenia:

H_1 : $\{W(u,0) = 0\} \subset \mathbb{R}^m$ jest rozłączną sumą dwóch podzbiorów A^+ i A^-;

H_2 : istnieje otoczenie Ω zbioru A^-, którego domknięcie jest rozłączne z A^+ i $W|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^m} > 0$;

H_3 : $\liminf_{|u|\to\infty} W(u,v) > 0$ jednostajnie względem v.

W Twierdzeniu 11 pokazuje się istnienie rozwiązania takiego, że

$$\operatorname{dist}\left(u(x), A^{\pm}\right) \to 0 \text{ przy } x \to \pm\infty.$$

Chciałbym tutaj podzielić się kilkoma obserwacjami. Jak już zauważono w pracy, mamy całkę pierwszą

$$H = \frac{1}{2}\left(u''\right)^2 - W + W'_v u' - u^{(3)}u',$$

ponadto to równanie wynika z zasady wariacyjnej dla funkcjonału

$$J_{\mathbb{R}} = \int \left(\left(u''\right)^2/2 + W(u,u')\right) dx.$$

Równanie Fishera–Kołmogorowa przyjmuje postać układu

$$u' = v,\ v' = w,\ w' = z,\ z' = u - u^3 + \beta w.$$

Ten układ ma dwa punkty równowagi $(\pm 1, 0, 0, 0)$, które są siodłami z 2–wymiarowymi, stabilną i niestabilną, rozmaitościami niezmienniczymi. Ponieważ poziomica $\{H = 0\}$ całki pierwszej jest 3–wymiarowa, to naturalne jest przecinanie się rozmaitości niezmienniczych tych siodeł. Po drugie, ostatni układ jest odwracalny względem inwolucji

$$(x,u,v,w,z) \longmapsto (-x,-u,v,-w,z)$$

i istnienie orbit heteroklinicznych jest dosyć oczywiste.

W pracy (S3) "Theory of light–matter interaction in nematic liquid crystals and the second Painlevé equation", *Calculus of Variations and PDEs* **56** (2017) 93 (z M.

G. Clerc, J. D. Dávila, M. Kowalczyk i E. Vidal-Henriquez) rozważa się równanie (0.2) związane z funkcjonałem

$$E=\int\left(\frac{\varepsilon}{2}\left(u'\right)^2-\frac{1}{2\varepsilon\mu\left(x\right)}u^2+\frac{1}{4\varepsilon}u^4-af\left(x\right)u\right)dx.$$

Tutaj funkcja $\mu\left(x\right)$ jest parzysta, malejąca dla $x>0$ i zerująca się dla $x=\pm\xi$, zaś funkcja $f\left(x\right)$ jest nieparzysta i dodatnia dla $x>0$.

Ten funkcjonał pojawia się w fizyce oddziaływania światła z materią w niematycznych ciekłych kryształach.

W Twierdzeniu 1.1 pokazano, że:

przy $a=0$ rozwiązanie jest parzyste i stałego znaku;

przy $a>0$ rozwiązanie ma dokładnie jedno zero $\bar{x}$, $|\bar{x}|<\xi+O\left(\sqrt{\xi}\right)$ i $u\left(x\right)>0$ dla $x>\bar{x}$;

przy $a>a^*$ (danego wzorem) mamy $\bar{x}\rightarrow 0$ przy $\varepsilon\rightarrow 0$ i podano wzór dla $\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}u\left(\bar{x}+\varepsilon s\right)$.

W Twierdzeniu 1.2 wykazano że funkcja

$$w^{\pm}\left(s\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{-\mu_1\varepsilon}}u\left(\pm\xi\pm\varepsilon^{2/3}\frac{s}{\sqrt[3]{-\mu_1}}\right)$$

dąży do rozwiązania równania Painlevé P2:

$$\frac{d^2y}{ds^2}=sy+2y^3+\alpha.$$

W Twierdzeniu 1.3 podano asymptotyki rozwiązań równania P2 przy $s\rightarrow+\infty$ i przy $s\rightarrow-\infty$.

W pracy (S4) "Multiphase solutions to the vector Allen-Cahn equation: crystalline and other complex symmetric structures", *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **225** (2017) 685–715 (z P. Bates i G. Fusco) rozważa się równanie

$$\Delta u=\nabla W,\quad u:\mathbb{R}^n\longmapsto\mathbb{R}^m,$$

gdzie W jest funkcją na $\mathbb{R}^m$.

Zakłada się (Hypothesis 1), że na $\mathbb{R}^n$ działa skończona grupa G generowana przez odbicia (np. D_k) z dziedziną fundamentalną F, na $\mathbb{R}^m$ działa analogiczna grupa Γ z dziedziną fundamentalną Φ. Ponadto mamy homomorfizm $f:G\longmapsto\Gamma$.

Następnie (Hypothesis 2) W jest niezmiennicza względem Γ i $W\left(su\right)\geq W\left(u\right)$ dla $s\geq 1$ i $|u|=M$.

Ponadto (Hypothesis 3) $0=W\left(a\right)<W(u)$ dla pewnego $a\in\Phi$ i wszystkich $u\in\Phi\diagdown a$ oraz druga pochodna funkcji $q\longmapsto W\left(a+qv\right)$, $|v|=1$, jest dodatnia.

Mówimy, że odwzorowanie u jest ekwiwariantne, jeśli

$$u\left(gx\right)=f\left(g\right)u\left(x\right),\quad g\in G.$$

W Twierdzeniu 3.1 pokazano istnienie ekwiwariantnych rozwiązań (z pewnymi własnościami) a w Twierdzeniu 3.2 wykazano istnienie nietrywialnych rozwiązań równania

$$\Delta u=R^2\nabla W$$

(również z pewnymi własnościami).

Następna praca (S5) "The connecting solution of the Painlev´e phase transition model", *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **XXI** (2020), 977–998 (z M.

G. Clerc, M. Kowalczykiem) jest poświęcona równaniu różniczkowemu cząstkowemu typu P2

$$\Delta u = x_1 u + 2u^3,\ u : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}.$$

Ma ono pewien związek z równaniem Newtona $u'' = \frac{d}{du}W$, gdzie $W = \frac{1}{2}\left(u^2-1\right)^2$ ma dwa minima (fazy). Tutaj prawa strona też ma podobny charakter dla $x_1 < 0$. Celem autorów jest skonstruowanie, dla

$$n = 2,$$

rozwiązań niejako łączących gałęzie minimów.

W Twierdzeniu 1.2, dla $n = 2$, pokazano istnienie rozwiazania u takiego, że:

(i) jest dodatnie w górnej półpłaszczyźnie i nieparzyste względem x_2;

(ii) spełnia pewne warunki ograniczoności;

(iii) jest minimalne względem pewnej klasy zaburzeń;

(iv) $|u| \sim Ai\,(x_1)$ przy $x_2 \to \infty$ (Ai to funkcja Airy);

(v) dla ustalonego x_2 funkcja

$$\tilde{u}\,(t_1, t_2) = \sqrt{2}\,(-3t_1/2)^{-1/3}\, u\left(1\,(-3t_1/2)^{2/3}, x_2 + t_2\,(-3t_1/2)^{-1/3}\right)$$

dąży do konkretnej funkcji przy $t_1 \to \infty$;

(vi) $\partial u/\partial x_1 < 0$ dla $x_2 > 0$;

(vii) $\partial u/\partial x_1 > 0$ i $u\,(x_1, x_2)$ dąży przy $x_2 \to \infty$ do tzw. rozwiązania Hastingsa–McLeoda równania P2.

Ostatnia praca (S6) "Vortex filament solutions in the Ginzburg-Landau-Painlev´e theory of phase transition", *Journal de Mathematiques Pures et Appliquées* (w druku) jest samodzielna i poświęcona wektorowej wersji równania z poprzedniej pracy

$$\Delta u = x_1 u + 2\,|u|^2\, u,\ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Jest ono analogiczne do równania Ginzburga–Landau $\Delta u = |u|^2\, u - u$ (wynikającym z zagadnienia wariacyjnego dla funkcjonału $\int \left(\frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\left(|u|^2 - 1\right)^2\right) d^n x$) i z rozwiązaniami w postaci wirów

$$\eta\,(x) = \eta_{rad}\,(|x|)\, x/\,|x|\,,$$

gdzie η_{rad} jest rosnącą funkcją mającą nieparzyste rozszerzenie na prostą i dążącą do 1 na ∞.

Oznaczmy $z = (x_2, \ldots, x_n)\,,\ e_z = z/\,|z|\,,\ \sigma = |z|\,.$

W Twierdzeniu 1 pokazano istnienie rozwiązania u takiego, że:

(i) $u\,(x) = u_{rad}\,(x_1, \sigma)$ z własnościami względem σ jak powyższa funkcja η_{rad};

(ii) $u_{rad} > 0$, $\partial u_{rad}/\partial x_1 < 0$, $\partial u_{rad}/\partial \sigma > 0$;

(iii) $|u| < h\,(x_1)$ i $\lim_{\sigma\to\infty} u_{rad}\,(x_1, \sigma) = h\,(x_1)\,,$ gdzie h jest rozwiązaniem Hastingsa–McLeoda równania P2;

(iv) ma miejsce analogiczne graniczne zachowanie dla odpowiedniej funkcji $\tilde{u}\,(t_1, \ldots, t_n)$ jak w poprzedniej pracy.

Jeśli chodzi o pozostały dorobek Smyrnelisa to należy wyróżnić monografię "Elliptic systems of phase transition type", Springer–Birkhauser, 2018 (z N. D. Alikakosem i G. Fusco). Jej tematyka z grubsza pokrywa się z tematyką habilitacji.

Część prac spoza habilitacji jest związana z powyższą tematyką. W szczególności, w dwóch pracach dowodzi się istnienia orbit heteroklinicznych w przestrzeniach Hilberta. Również badane są warunki niezdegenerowania orbit łączących.

Habiliatant dowodził też pewnych oszacowań dla rozwiązń. Na przykład, dla równania $\Delta u = W'(u)$, $W \geq 0$, było znane (dosyć oczywiste) oszacowanie Modiki $|\nabla u|^2 \leq 2W(u)$. Smyrnelis udowodnił oszacowanie $|\nabla u|^2 \leq 2\sqrt{W(u)}$ dla potencjału Ginzburga–Landau $\frac{1}{4}\left(1 - |u|^2\right)^2$.

Dowodzono też pewne zasady maksimum dla funkcjonałów jak powyżej.

Ciekawie wygląda praca "On Abrikosov Lattice Solutions of the Ginzburg-Landau Equations", *Mathematical Physics Analysis and Geometry* **21** (2018), 7 (z I. Chenn i I. M. Sigalem), gdzie pojawiają sie funkcje Theta.

W jednej prac (wynikłej z doktoratu) udowodniono Twierdzenie 5.1: Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie gładkim obszarem Jordana i niech $u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem harmonicznym spełniajacym $\frac{\partial u}{\partial n} \perp \frac{\partial u}{\partial t}$ dla $x \in \partial\Omega$, gdzie t jest wektorem stycznym do $\partial\Omega$ a n jest wektorem normalnym. Wówczas u jest konforemne.

Dr Smyrnelis jest dosyć aktywny na polu dydaktycznym, organizacyjnym i popularyzatorskim. Natomiast nie widać jego uczestnictwa w grantach.

Moje wrażenie z lektury przedstawionego mi dorobku jest mieszane. Z jednej strony, badane zagadnienia pochodzą z fizyki a wyniki prac habilitanta mają charakter jakościowy. Z drugiej strony, uderza znaczna jednorodność tematyki oraz nieznajomość elementarnych pojęć i metod z mechaniki i układów dynamicznych. Ale to dotyczy całej grupy jego nauczycieli i współpracowników. Dlatego mam pewne wątpliwości co do istotnej wartości tych wyników.

Pomimo to, jestem zdecydowany poprzeć prośbę habilitanta i wnioskować o dopuszczenie rozprawy do dalszych etapów procedury habilitacyjnej.