Poznań, 15-08-2021

prof. dr hab. Mieczysław Mastyło
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Recenzja osiągnięcia naukowego dr. Jana Rozendaala w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Pan dr. Jan Rozendaal ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie w Lejdzie w 2011 roku. W latach 2011–2015 odbył studia doktoranckie na Uniwersytecie Technicznym w Delfcie, gdzie w 2015 roku uzyskał stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy doktorskiej „*Transference, Double Operator Integrals and Applications*", napisanej pod kierunkiem prof. dr. M. Haase i prof. dr. B. de Pagtera. W latach 2015–2017 dr Rozendaal był zatrudniony na stanowisku adiunkta w IM PAN w Warszawie, natomiast w latach 2017–2020 przebywał na stypendium podoktorskim na Uniwersytecie Australijskim. Od sierpnia 2020 roku jest ponownie zatrudniony w IM PAN na stanowisku adiunkta.

Osiągnięcie naukowe dra Rozendaala pod tytułem „*Analiza harmoniczna na przestrzeniach Banacha i teoria stabilności dla równań ewolucyjnych*" składa się z następujących pięciu artykułów:

(R1) J. Rozendaal, D. Seifert, R. Stahn, *Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces*, Adv. Math. **346** (2019), 359–388.

(R2) J. Rozendaal, M. Veraar, *Sharp growth rates for semigroups using resolvent bounds*, J. Evol. Equ. **18** (2018), no. 4, 1721–1744.

(R3) J. Rozendaal, M. Veraar, *Stability theory for semigroups using* (L_p, L_q) *Fourier multipliers*, J. Funct. Anal. **275** (2018), no. 10, 2845–2894.

(R4) J. Rozendaal, M. Veraar, *Fourier multiplier theorems involving type and cotype*, J. Fourier Anal. Appl. **24** (2018), no. 2, 583–619.

(R5) J. Rozendaal, M. Veraar, *Fourier multiplier theorems on Besov spaces under type and cotype conditions*, Banach J. Math. Anal. **11** (2017), no. 4, 713–743.

Ocena osiągnięcia naukowego. Z załączonych w dokumentacji dwóch oświadczeń wynika, że wkład Habilitanta oraz dwóch współautorów w powstanie pracy (R1) jest jednakowy, a wkład w powstanie każdej z prac (R2–R5) wynosi 50%.

Problematyka badawcza dra Jana Rozendaala związana jest z analizą harmoniczną oraz teorią operatorów i jej zastosowaniami w teorii równań ewolucyjnych. W zakresie teorii operatorów Habilitant bada jednoparametrowe półgrupy operatorów. Te badania są dobrze umotywowane, gdyż półgrupy operatorów mają ważne zastosowanie w teorii równań ewolucyjnych w przestrzeniach Banacha. Aby opisać niektóre rezultaty, które uważam za wartościowe i wnoszące wkład w obszarze wspomnianej tematyki badawczej, zwrócę uwagę na pewne aspekty tej tematyki. W dalszym ciągu jeśli A jest domkniętym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X, to $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ dla wszystkich λ należących do zbioru rezolwenty $\rho(A)$ operatora A.

Klasyczny problem w teorii równań ewolucyjnych dotyczy abstrakcyjnego problemu Cauchy'ego pierwszego rzędu postaci $u'(t) = Au(t)$ $(t \geq 0)$ z warunkiem początkowym $u(0) = x$, gdzie A jest domkniętym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X i $x \in X$. Wiadomo, że problem Cauchy'ego ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowe, które zależy od x w sposób ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy operator A generuje C_0-półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ operatorów na X i wówczas rozwiązanie u wyraża się wzorem $u(t) = T(t)x$ dla każdego $t \geq 0$. Dr Rozendaal bada asymptotyczne własności rozwiązania równania Cauchy'ego przy założeniu ciągłej zależności tego rozwiązania od warunków początkowych. W tym celu analizuje zachowanie orbit $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ stosując własności spektralne generatora A własności półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$. Tutaj kluczową rolę odgrywa analiza rezolwenty $R(\omega + i\xi, A)$ operatora A. Z ogólnej teorii wynika, że istnienie $R(\omega + i\xi, A)$ dla pewnego $\omega < 0$ i każdego $\xi \in \mathbb{R}$ pozwala odtworzyć $e^{-\omega t}T(t)x$ $(t \geq 0)$ za pomocą transformaty Laplace'a $R(\omega + i\xi, A)x$ dla x należących do odpowiednich gęstych podprzestrzeni przestrzeni Banacha X. Ten fakt w kombinacji z dodatkowymi informacjami o zachowaniu $R(\omega + i\xi, A)x$ pozwala wykazać, że istnieje taka stała $C = C(x) > 0$, że zachodzi oszacowanie $\|T(t)x\|_X \leq Ce^{\omega t}$, $t \geq 0$. Z punktu widzenia zastosowań pojawia się problem (zgodnie z oznaczeniem w autoreferacie) (P1) polegający na wykazaniu powyższego oszacowania dla elementów $x \in D((-A)^\alpha)$ dla pewnego $\omega < 0$ i $\alpha \in (0, 1)$. W 2015 roku Habilitant i M. Veraar zauważyli, że pewne znane wyniki dotyczące problemu (P1) można udowodnić innymi metodami i opisać w terminach własności odpowiednich mnożników Fouriera rezolwenty. Efektem ich wspólnych badań jest rozwinięcie teorii operatorowych mnożników Fouriera.

W pracy (R4) badane są mnożniki Fouriera $m \in \mathcal{M}_{p,q}(X, Y)$ $(p, q \in [1, \infty])$, tzn. symbole $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(X, Y)$ o wartościach w przestrzeni operatorów $\mathcal{L}(X, Y)$ między przestrzeniami Banacha X i Y, dla których istnieje taka stała $C > 0$, że $\|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n;Y)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)}$ dla każdego $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$. Tutaj $T_m(f) := \mathcal{F}^{-1}(m \cdot \mathcal{F}(f))$, gdzie $\mathcal{F}(f)$ oznacza transformatę Fouriera $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$. Główny wynik (Theorem 3.18) wspomnianej pracy głosi, że jeśli $1 < p < p_0 \leq 2$, $2 \leq q_0 < q < \infty$ i przestrzeń Banacha X ma typ Rademachera p_0, a przestrzeń Y ma kotyp Rademachera q_0 oraz jeśli $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathcal{L}(X, Y)$ jest silnie mierzalne oraz zbiór $\{|\xi|^{n(1/p-1/q)}m(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ jest R-ograniczony, to $m \in \mathcal{M}(X, Y)$. Jeśli $p_0 = 2$ lub $q_0 = 2$, to stwierdzenie jest również prawdziwe odpowiednio dla $p = p_0$ lub $q = q_0$. Dla jasności przypomnijmy, że rodzina $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ jest R-ograniczona, jeśli istnieje taka stała $C > 0$, że spełniona jest nierówność $\big(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^k r_j(t)\, T_j x_j\|_Y^2\, dt\big)^{1/2} \leq C\big(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^k r_j(t)\, x_j\|_X^2\, dt\big)^{1/2}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz dowolonych $x_1, \ldots, x_k \in X$ i $T_1, \ldots, T_k \in \mathcal{T}$, gdzie (r_j) jest ciągiem funkcji Rademachera na $[0, 1]$.

W pracy (R5) autorzy dowodzą warianty twierdzeń o ograniczoności operatora T_m między wektorowymi przestrzeniami Besova, przy założeniach o typie i kotypie Fouriera, jak również o typie i kotypie Rademachera przestrzeni Banacha X i Y generujących odpowiednie przestrzenie Besova. W szczególności dowodzą, że jeśli przestrzeń Banacha X ma typ $p \in [1, 2]$, Y ma kotyp $q \in [2, \infty]$ i symbol $m\colon \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathcal{L}(X, Y)$ silnie mierzalny jest taki, że zbiór $\{m(\xi); \xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ jest R-ograniczony, to dla każdego $s \in \mathbb{R}$ i $v \in [1, \infty]$ operator T_m jest ograniczony z przestrzeni Besova $B^s_{p,v}(\mathbb{R}^n, X)$ do przestrzeni $B^{s-n(1/p-1/q)}_{q,v}(\mathbb{R}^n; Y)$.

W (R3) wypracowano narzędzia, które w kombinacji ze znanymi wcześniej wynikami pokazują oryginalne podejście do problemu (P1). Badany jest operator T_m z symbolem $m(\xi) = R(\omega' +$

$i\xi, A) \in \mathcal{L}(D((-A)^\alpha))$ ($\alpha \in [0,1]$) do wykazania istnienia takich $\omega < 0$ i $C > 0$, że zachodzi oszacowanie $\|T(t)x\|_X \le Ce^{-\omega t}\|x\|_{D((-A)^\alpha)}$ dla wszystkich $x \in D((-A)^\alpha)$, $t \ge 0$, gdzie $(T(t))_{t\ge 0}$ jest C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. W szczególności otrzymują rezultat L. Weisa i V. Wrobela (opublikowany w PAMS (1996)), który głosi, że jeśli X ma typ Fouriera $p \in [1,2]$, $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(\lambda) \ge 0\} \subset \rho(A)$ i $\sup_{\mathrm{Re}(\lambda)\ge 0} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, to istnieją takie $\omega < 0$ i stała $C > 0$, że wspomniane powyżej oszacowanie zachodzi dla $\alpha = (2/p) - 1$. Ponadto w pracy rozważa się specjalne C_0-półgrupy związane z zaburzonymi równaniami falowymi, dla których $\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \simeq (1 + |\xi|)^\beta$ dla pewnego $\beta > 0$ i wszystkich $\xi \in \mathbb{R}$. Na uwagę zasługuje wartościowy rezultat (Theorem 4.6): jeśli $\alpha \ge 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ i $(T(t))_{t\ge 0}$ spełnia warunki jak wyżej oraz $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C'(1 + |\lambda|)^\beta$, to wielomianowe oszacowanie $\|T(t)x\|_X \le Ct^{-n}\|x\|_{D((-A)^\alpha}$ dla wszystkich $x \in D((-A)^\alpha)$ i $t \ge 1$ jest równoważne ze stwierdzeniem, że dla każdego $k \in \{1, \dots, n+1\}$ istnieją takie $p, q \in [1, \infty]$, że operator T_m z symbolem $m(\xi) = R(i\xi, A)^k$ jest ograniczony z $L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha))$ do $L^q(\mathbb{R}; X)$.

W teorii zaburzonego równania falowego ważną rolę odgrywa symbol $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto R(i\xi, A)$, gdzie operator A na przestrzeni Banacha X generuje jednostajnie ograniczoną C_0-półgrupę $(T(t))_{t\ge 0}$ i zbiór rezolwenty $\rho(A) \supseteq i\mathbb{R}$. Ważnym problemem w tej teorii jest określenie asymptotyki orbit półgrupy $(T(t))_{t\ge 0}$ przy założeniu, że funkcja $M\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ określona wzorem $M(s) := \sup_{|\xi|\le s} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ dla $s \ge 0$ spełnia warunek $\lim_{s\to\infty} M(s) = \infty$. Ten problem związany jest z analizą asymptotyki funkcji $t \mapsto \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ dla dostatecznie dużych t. Wspomnianym problemem zajmowało się wielu autorów, a wśród nich również Habilitant. Główny wynik w pracy (R1) związany z tym problemem głosi (przy powyższych założeniach), że jeśli X jest przestrzenią Hilberta i funkcja M ma dodatni wzrost na $[1, \infty)$ (tzn. istnieją takie stałe $\alpha > 0$, $c \in (0,1)$ i $s_0 \ge 1$, że $M(\lambda s) \ge c\lambda^\alpha M(s)$ dla wszystkich $\lambda \ge 1$ i $s \ge s_0$), to $\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \simeq M^{-1}(t)^{-1}$ dla dostatecznie dużych t. Należy tutaj zwrócić uwagę, że pewne narzędzia użyte w dowodzie tego rezultatu pochodzą ze znakomitej pracy C. Batty'ego, R. Chilla i Y. Tomilova opublikowanej w *Journal of the European Mathematical Society* (2016). W pracy tej pokazano, że opisany rezultat zachodzi dla pewnej klasy funkcji M o dodatnim wzroście. Ponadto udowodniono, że jeśli C_0-półgrupa $(T(t))_{t\ge 0}$ jest normalna, to $\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = O(M^{-1}(t)^{-1})$ przy $t \to \infty$ implikuje, że M ma dodatni wzrost. W konsekwencji wspomniane twierdzenie z pracy (R1) w kombinacji z tym wynikiem daje pełną odpowiedź na hipotezę C. Batty'ego i T. Duyckaertsa (w przypadku przestrzeni Hilberta) postawioną w pracy opublikowanej w *Journal of Evolution Equations* (2008). Dla kompletności przypomnijmy, że Batty i Duyckaerts udowodnili, że dla dowolnej przestrzeni Banacha X istnieją takie stałe $c, C > 0$, że $cM^{-1}(Ct)^{-1} \le \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le CM_{\log}^{-1}(ct)^{-1}$ dla dostatecznie dużych t, gdzie $M_{\log}(s) := M(s)(\log(1 + M(s)) + \log(1+s))$, $s \ge 0$ i postawili hipotezę, że prawostronne oszacowanie nie jest ulepszalne w ogólnym przypadku (co wykazali Batty, Chill i Tomilov we wspomnianej pracy), jednak można je ulepszyć dla przestrzeni Hilberta.

Nie jestem specjalistą w teorii równań ewolucyjnych, ani zaburzonych równań falowych. Jak mi wiadomo z monografii i analizy pewnych wcześniejszych prac teoria ta jest głęboko związana z teorią C_0-półgrup operatorowych i rachunkiem funkcyjnym dla generatorów tych półgrup na przestrzeniach Banacha. Znane klasyczne wcześniejsze metody w tej teorii zostały rozwinięte i są stosowane bardziej zaawansowane techniki. Opierają się one na zastosowaniu metod współczesnej analizy. Ważnym narzędziem w badaniu są operatorowe mnożniki Fouriera. Tutaj należy zwrócić uwagę na pracę J. Bourgaina o operatorowym mnożniku Fouriera typu Mihlina dla przestrzeni Banacha z własnością UMD (krótko UMD-przestrzeni), w której pojawiła się idea ważnego pojęcia R-ograniczoności dla rodzin operatorów (zdefiniowanego przez E. Berksona i T. A. Gillespie, Studia Math. 112 (1994)), które odegrało kluczową rolę m.in. w pracach L. Weisa o operatorowych mnożnikach Fouriera o wartościach w przestrzeni operatorów między UMD-przestrzeniami (uogólniających wyniki Bourgaina) oraz pracach L. Weisa i N. Kaltona o H^∞-rachunku funkcyjnym dla operatorów sektorialnych.

Na podstawie prac (R1–R5) i analizy dowodów mogę stwierdzić, że dr Rozendaal bardzo dobrze opanował szereg technik związanych z omawianą tematyką badawczą i je rozwinął. Pewne użyte nowe techniki dowodowe są eleganckie i świadczą o dużej dojrzałości matematycznej Habilitanta. Umiejętnie stosuje on zaawansowane metody z lokalnej teorii przestrzeni Banacha, analizy harmonicznej oraz teorii operatorów. Wspomniana własność R-ograniczoności odgrywa również ważną rolę w prowadzonych przez niego badaniach. Wszystkie prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego dra Rozendaala ukazały się w solidnych czasopismach matematycznych, a dwie z nich w prestiżowych czasopismch *Advances in Mathematics* i *Journal Functional Analysis*. Jego wspólne badania z prof. M. Veraarem doprowadziły do rozbudowania teorii mnożników Fouriera generowanych przez symbole operatorowe. Zastosowanoe tych wyników pozwoliło na udowodnienie nowych ogólnych istotnie silniejszych rezultatów. Z pewnoacią zyskane wyniki znajdą dalsze interesujące zastosowania w teorii stabilności równań ewolucyjnych. Ogólne rezultaty dotyczące charakteryzacji tempa zaniku orbit mocno ciągłych półgrup operatorowych na przestrzeniach Banacha w terminach rezolwent generatorów półgrup stanowią ważny wkład do teorii C_0-półgrup operatorowych oraz teorii abstrakcyjnego problemu Cauchy'ego. Należy podkreślić, że udzielenie w pracy (R1) odpowiedzi na hipotezę postawioną przez C. Batty'ego i T. Duyckaertsa jest wartościowym osiągnięciem Habilitanta. Uważam, że przedstawione osiągnięcie naukowe dr. Jana Rozendaala wnosi wartościowy wkład do teorii mnożników Fouriera, teorii stabilności rozwiązań abstrakcyjnego problemu Cauchy'ego w przestrzeniach Banacha dla klasycznego równania ewolucyjnego.

Ocena aktywności naukowej. Całkowity dorobek dra Rozendaala składa się z 12 artykułów, w tym 8 artykułów powstało po uzyskaniu stopnia doktora. Poza pracami (R1–R5) stanowiącymi osiągnięcie naukowe dr Rozendaal jest współautorem 6 prac i jednej samodzielnej pracy. Jego prace opublikowane po doktoracie ukazały się w solidnych czasopismach z listy JCR, a trzy z nich w prestiżowych czasopismach: *Advances in Mathematics, Journal of Functional Analysis, Transactions of the American Mathematical Society.* Według bazy Web of Science, artykuły Habilitanta były cytowane 50 razy, a obecny indeks Hirscha wynosi 5. Natomiast według bazy MathSciNet był cytowany 58 razy przez 46 autorów, a praca (R1) opublikowana w Advances in Mathematics w 2019 roku ma największą liczbę cytowań ze wszystkich prac Habilitanta równą 17. Mimo, że dorobek naukowy Habilitanta nie jest ilościowo wysoki jest jednak ważki. Po doktoracie poza artykułami wchodzącymi w skład rozprawy habilitacyjnej dr Rozendaal jest współautorem 3 prac, które zostały opublikowane w solidnych czasopismach z listy JCR. Na uwagę zasługuje interesująca praca, która ukazała się w *The Quarterly Journal of Mathematics* (2019). Na uwagę zasługuje fakt, że w pracy tej zastosowano wyniki o operatorowych mnożnikach Fouriera z prac (R4) i (R5) do teorii rachunku funkcyjnego.

Dr Rozendaal uczestniczył w międzynarodowych i krajowych projektach badawczych. W latach 2011–2015 (odpow., 2017–2020) był wykonawcą w projekcie finansowanym przez holenderską organizację badań (odpow., Australijską Radę Badawczą). Ponadto w latach 2015–2017 był głównym wykonawcą projektu finansowanego ze środków IMPACT. W roku 2020 był wykonawcą w projekcie badawczym NCN. Obecnie jest głównym wykonawcą projektu badawczego NCN przyznanego na okres dwóch lat od 2021 do 2022 roku.

Habilitant aktywnie uczestniczy w życiu naukowym recenzując prace naukowe do czasopism matematycznych o uznanej randze międzynarodowej. Był recenzentem 23 prac naukowych dla 19 czasopism w tym *Advances in Mathematics*, *Journal of Evoloutin Equations*. Ma duże doświadczenie we współpracy z zagranicznymi ośrodkami naukowymi. W latach 2013–2019 był zapraszany przez znanych matematyków. Łącznie odbył 8 staży w znanych ośrodkach naukowych, w tym: USA (styczeń 2018, lipiec – sierpień 2019, sierpień – wrzesień 2019), Australia (kwiecień 2014, październik 2013 – kwiecień 2014), Nowa Zelandia (marzec 2014).

Dr Rozendaal brał udział w wielu krajowych oraz międzynarodowych konferencjach, na których wygłosił odczyty plenarne. Był również zapraszany z odczytami naukowymi do ośrodków naukowych w Australii, Holandii i Niemczech. Był współorganizatorem międzynarodowej konferencji Positivity VII: the Zaanen Centennial Conference (Leiden, 22–26 lipca 2013). W dokumentacji nie znalazłem informacji o wypromowanych pracach magisterskich czy licencjackich. Podsumowując stwierdzam, że aktywność naukowa dra Rozendaala jest na wysokim poziomie.

Konkluzja. W mojej opinii przedstawione osiągnięcie naukowe i aktywność naukowa Habilitanta spełniają wymagania ustawowe stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. Wnoszę o dopuszczenie dr. Jana Rozendaala do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

M. Mastyło