AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Jan Rozendaal

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne

- Doktor matematyki Uniwersytetu Technicznego w Delfcie, Holandii w 2015 r. Rozprawa doktorska pt. *Functional Calculus via Transference, Double Operator Integrals and Applications*, promotorzy: prof. dr. M. Haase i prof. dr. B. de Pagter.
- Magister matematyki (z wyróżnieniem) Uniwersytetu w Lejdzie, Holandii w 2011 r. Praca magisterska pt. *A disintegration theorem for representations on L^p-spaces*, promotor: dr. M. de Jeu.
- Licencjat matematyki Uniwersytetu w Lejdzie, Holandii w 2010 r. Praca licencjacka pt. *A space of spaces*, promotor: dr. M. de Jeu.

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Adiunkt. Od sierpnia 2020.
- Australijski Uniwersytet Narodowy. Post-doc. Sierpień 2017 - lipiec 2020.
- Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Adiunkt. Październik 2015 - lipiec 2017.
- Uniwersytet Techniczny w Delfcie. Doktorant. Maj 2011 - wrzesień 2015.

4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod wspólnym tytułem

Analiza harmoniczna na przestrzeniach Banacha i teoria stabilności dla równań ewolucyjnych.

Cykl składa się z następujących artykułów:

(R1) *Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces.* Adv. Math. 346 (2019), 359-388. With D. Seifert and R. Stahn.

(R2) *Sharp growth rates for semigroups using resolvent bounds.* J. Evol. Equ. 18 (2018), no. 4, 1721-1744. With M. Veraar.

(R3) *Stability theory for semigroups using (L^p, L^q) Fourier multipliers.* J. Funct. Anal. 275 (2018), no. 10, 2845-2894. With M. Veraar.

(R4) *Fourier multiplier theorems involving type and cotype.* J. Fourier Anal. Appl. 24 (2018), no. 2, 583-619. With M. Veraar.

(R5) *Fourier multiplier theorems on Besov spaces under type and cotype conditions.* Banach J. Math. Anal. 11 (2017), no. 4, 713-743. With M. Veraar.

Poniżej opisujemy wspomniane osiągnięcia.

4.1. **Notacja.** Za liczby naturalne przyjmujemy $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ i oznaczamy $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wykładnik sprzężony do $p \in [1, \infty]$ zapisujemy jako p'.

Przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha X i Y oznaczamy przez $\mathcal{L}(X, Y)$ i przyjmujemy $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$. Przestrzeń funkcji Schwartza o wartościach w X i przestrzeń dystrybucji temperowanych na $\mathbb{R}^n$ zapisujemy odpowiednio jako $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$ i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; X)$, a dla

$X = \mathbb{C}$ przyjmujemy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Transformatę Fouriera $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n;X)$ zapisujemy jako $\mathcal{F}f$ lub $\widehat{f}$. Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^n;X)$, to

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Operator identycznościowy na X oznaczamy I_X i piszemy λ dla λI_X gdy $\lambda \in \mathbb{C}$. Dziedzinę domkniętego operatora A na X zapisujemy jako $D(A)$ i jest ona przestrzenią Banacha z normą

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_X + \|Ax\|_X, \quad x \in D(A).$$

Spektrum A oznaczamy przez $\sigma(A)$, a zbiór rezolwenty przez $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Rezolwentę A w $\lambda \in \rho(A)$ zapisujemy jako $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$.

Oznaczmy $f(s) \lesssim g(s)$, jeżeli $f(s) \leq Cg(s)$ dla każdego s i stałej $C > 0$ niezależnej od s. Podobnie definiujemy $f(s) \gtrsim g(s)$ i $g(s) \eqsim f(s)$.

Po wymagane podstawy teorii równań ewolucyjnych i C_0-półgrup odsyłamy do [6, 30].

4.2. **Krótki opis dziedziny naukowej.** Jednym z głównych celów teorii równań różniczkowych cząstkowych jest określenie asymptotyki rozwiązań zadanego równania różniczkowego cząstkowego. Dla liniowych równań różniczkowych cząstkowych, które można zbadać poprzez przeformułowanie ich w języku równań ewolucyjnych, wiadomo, że długofalowe zachowanie ich rozwiązań jest związane z własnościami generatora półgrupy rozwiązań.

Mówiąc precyzyjniej, rozważmy abstrakcyjne zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie $u : [0,\infty) \to X$ dla pewnej przestrzeni Banacha X, domkniętego operatora A na X i $x \in X$. Wówczas (4.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie całkowe dla każdego $x \in X$ i rozwiązanie to zależy od x w sposób ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy A generuje C_0-półgrupę $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ na X (porównaj [30, Wniosek II.6.8]). W tym wypadku rozwiązanie u problemu (4.1) zadane jest przez $u(t) = T(t)x$ dla każdego $t \geq 0$. Ponadto jeżeli $x \in D(A)$, to $u \in C^1([0,\infty);X)$ i (4.1) zachodzi punktowo.

W naszych rozważaniach zakładamy istnienie dokładnie jednego rozwiązania zagadnienia (4.1) i ciągłej zależności od warunków początkowych. Wówczas aby określić asymptotyczne zachowanie rozwiązań (4.1), musimy zbadać długofalowe zachowanie orbit $t \mapsto T(t)x$. W tym celu możemy z kolei rozważyć własności spektralne generatora A, stosując klasycznej metodyki równań różniczkowych zwyczajnych do równań ewolucyjnych.

Istotnie istnieją $\omega' \in \mathbb{R}$ i $C \geq 1$, takie że $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\omega' t}$ dla każdego $t \geq 0$. Bez utraty ogólności rozważań załóżmy, że $\omega' = 0$. Wówczas rezolwenta $R(\omega + i\xi, A)$ istnieje dla wszystkich $\omega > 0$ i $\xi \in \mathbb{R}$ oraz

$$R(\omega + i\xi, A)x = \int_0^\infty e^{-t(\omega+i\xi)} T(t)x \,\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

dla każdego $x \in X$ (porównaj [30, Twierdzenie II.1.10]). Możemy odwrócić powyższą transformatę Laplace'a, aby otrzymać

$$e^{-\omega t} T(t)x = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} R(\omega + i\xi, A)x \,\mathrm{d}\xi \tag{4.3}$$

dla $t \geq 0$, gdzie całka ta zbiega bezwzględnie dla x w odpowiednich gęstych podprzestrzeniach X. Ogólnie rzecz biorąc, dla dowolnego $x \in X$ możemy wówczas wykorzystać informacje o $R(\omega + i\xi, A)x$, aby ograniczyć całkę w (4.3) i otrzymać $C' = C'_x \geq 0$, dla którego

$$\|T(t)x\|_X \leq C' e^{\omega t}, \quad t \geq 0. \tag{4.4}$$

Oczywiście założyliśmy od początku, że $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$, więc nie jest to pomocne dla $\omega > 0$. Jednakże, jeśli $R(\omega + i\xi, A)$ istnieje dla pewnego $\omega < 0$ i dla każdego $\xi \in \mathbb{R}$, to nadal możemy użyć (4.3), aby powiązać informacje o $R(\omega + i\xi, A)$ z ograniczeniami jak w (4.4). Ponieważ $\omega < 0$, dostajemy wtedy

oszacowanie zaniku orbity $t \mapsto T(t)x$. To podejście do asymptotyki rozwiązań równania ewolucyjnego jest użyteczne w praktyce, gdyż rezolwenta jest zazwyczaj znacznie bardziej przystępna niż sama półgrupa.

Sprecyzujmy podaną wyżej heurystykę w szczególnym przypadku. Załóżmy, że $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ i

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{4.5}$$

Wówczas argument szeregu Neumanna daje $\omega < 0$, takie że $\omega + i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$, jak również

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|R(\omega + i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{4.6}$$

Dalej możemy skorzystać z (4.6), aby otrzymać

$$\int_{\mathbb{R}} \|R(\omega + i\xi, A)x\|_X \, \mathrm{d}\xi < \infty \tag{4.7}$$

dla każdego x w dziedzinie ułamkowej $D((-A)^\alpha)$ dla $\alpha > 1$. Ponadto wtedy (4.3) istotnie implikuje (4.4) dla takich x.

Argument ten jest prawdziwy dla dowolnych przestrzeni Banacha. Z drugiej strony jeśli X jest przestrzenią Hilberta, to zastosowanie twierdzenia Plancherela do (4.3) daje nam, że (4.6) implikuje (4.4) dla każdego $x \in X$. Jest to tzw. twierdzenie Gearharta-Prüssa (porównaj [30, Twierdzenie V.1.11]). Różnica między uzyskaniem (4.4) dla każdego $x \in X$ a jedynie dla $x \in D((-A)^\alpha)$ dla $\alpha > 1$ jest istotna w praktyce. W większości zastosowań do równań różniczkowych cząstkowych A jest operatorem różniczkowym, więc elementy dziedzin ułamkowych $D((-A)^\alpha)$ stają się „gładsze" wraz ze wzrostem α. Zatem dla przestrzeni Hilberta (4.5) zadaje (4.4) dla dowolnie niegładkich danych początkowych, podczas gdy dla ogólnych przestrzeni Banacha otrzymujemy (4.4) tylko dla odpowiednio gładkich danych początkowych.

Stąd naturalnym podejściem wydaje się próba rozluźnienia dotychczasowych założeń. Rozpatrzymy dwa nieprecyzyjnie sformułowane problemy, jakie się wówczas pojawiają:

(P1) Otrzymać (4.4) dla $x \in D((-A)^\alpha)$ dla pewnego $\omega < 0$ i $0 < \alpha < 1$, zakładając, że bazowa przestrzeń Banacha ma więcej własności niż w pełnej ogólności, ale mniej niż przestrzeń Hilberta;

(P2) Określić asymptotykę orbit półgrupy, zakładając, że istnieje $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dla którego $M(\lambda) \to \infty$ gdy $\lambda \to \infty$, takie że

$$\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pierwsze z powyższych występuje w praktyce z nieliniowych równań na przestrzeniach L^2, gdzie pewne nieliniowości (np. nieliniowości wykładnicze) zmuszają do przeniesienia rozważań do L^p dla $p \neq 2$. Z drugiej strony (P2) jest interesujący nawet dla przestrzeni Hilberta, gdy doprecyzowujemy rozważania asymptotyki zadane z (4.4). Takie zachowania pojawiają się w zastosowaniach do zaburzonych równań falowych, gdzie (4.5) często nie zachodzi.

4.3. **Dotychczasowe wyniki nt. (P1).** Dla lepszego zilustrowania problemu i kierunku badań skupimy się na moment na klasycznym problemie analizy harmonicznej.

Mnożniki Fouriera. Dla $p \in [1, \infty)$ i funkcji mierzalnej $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o temperowanym wzroście chcielibyśmy określić założenia na *symbol* m, dla których *operator mnożnika Fouriera*

$$T_m(f) := \mathcal{F}^{-1}(m \cdot \mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{4.8}$$

przedłuża się w sposób ograniczony do $L^p(\mathbb{R})$. Jeśli $p = 2$, to z twierdzenia Plancherela mamy $T_m \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in L^\infty(\mathbb{R})$, gdzie

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Proste kryterium istnieje także dla $p = 1$: mamy $T_m \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in L^1(\mathbb{R})$. Jednakże problem ten jest wysoce nietrywialny dla $1 < p < \infty$. Twierdzenie Mikhlina o mnożnikach zadaje użyteczny warunek wystarczający (porównaj [35, Twierdzenie 5.2.7]): jeśli $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ i

$$\sup_{\xi \neq 0} |m(\xi)| + |\xi m'(\xi)| < \infty,$$

to $T_m \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}))$ dla każdego $1 < p < \infty$.

Okazuje się, że powyższy klasyczny problem analizy harmonicznej ma zastosowania do równań ewolucyjnych, przede wszystkim do pytań o maksymalną L^p regularność (porównaj [53]). Można tutaj uogólnić (4.8) do przypadku nieskończenie wymiarowego poprzez rozważenie przestrzeni Banacha X i Y, symboli $m : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(X, Y)$ o wartościach operatorowych i odpowiadającego operatora

$$T_m(f) := \mathcal{F}^{-1}(m \cdot \mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X).$$

Dla $p, q \in [1, \infty]$ przyjmujemy $m \in \mathcal{M}_{p,q}(X, Y)$, jeśli istnieje $C \geq 0$, takie że $\|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n;Y)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)}$ dla każdego $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$ i mówimy wówczas, że m jest *ograniczonym* $(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^q(\mathbb{R}^n; Y))$ *mnożnikiem Fouriera*. Dla $p < \infty$ implikuje to, że T_m przedłuża się do ograniczonego odwzorowania z $L^p(\mathbb{R}^n; X)$ do $L^q(\mathbb{R}^n; Y)$. Dla $p = \infty$ funkcje Schwartza nie są gęste w $L^\infty(\mathbb{R}^n; X)$, ale klasa $(L^\infty(\mathbb{R}^n; X), L^q(\mathbb{R}^n; Y))$ mnożników Fouriera jest przeważnie wystarczająco mała, aby odpowiadający operator istotnie przedłużał się do $L^\infty(\mathbb{R}^n; X)$ w inny sposób. Co więcej, przypadek $p = \infty$ nie jest dla nas szczególnie istotny, a używanie tej terminologii upraszcza sformułowania naszych wyników. Piszemy zatem stosownie

$$\|m\|_{\mathcal{M}_{p,q}(X,Y)} := \|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^q(\mathbb{R}^n;Y))} \tag{4.9}$$

dla $m \in \mathcal{M}_{p,q}(X, Y)$. Dla ułatwienia pomijamy wymiar n w tejże notacji.

Weis pokazał w [81], że $m \in \mathcal{M}_{p,p}(X, Y)$ dla każdego $1 < p < \infty$ jeśli X i Y są przestrzeniami UMD, $m \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathcal{L}(X, Y))$ oraz gdy

$$\{m(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \text{ and } \{\xi m'(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \tag{4.10}$$

są R-ograniczone w $\mathcal{L}(X, Y)$. Odsyłamy do [47] po definicję i własności R-ograniczoności. Szczególnym przypadkiem symbolu o wartościach operatorowych, do którego stosujemy tę teorię, jest

$$m(\xi) := R(i\xi, A), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

gdzie A generuje C_0-półgrupę i $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0\} \subseteq \rho(A)$. Warunek Weisa na mnożnik dla tego szczególnego symbolu jest głównym narzędziem w teorii maksymalnej L^p regularności.

Teoria stabilności. Rezolwenta pojawia się także jako mnożnik Fouriera w asymptotycznej teorii równań ewolucyjnych. Istotnie załóżmy jak wcześniej, że A generuje C_0-półgrupę, dla której $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$ dla pewnego $C \geq 0$ i wszystkich $t \geq 0$ oraz że zachodzi (4.5). Ustalmy $\omega < 0$, takie że zachodzi (4.6). Niech $\widetilde{\omega} > 0$ i przyjmijmy

$$m(\xi) := I_X + (\widetilde{\omega} - \omega)R(\omega + i\xi, A), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Wówczas

$$t \mapsto f(t) := \begin{cases} e^{-\widetilde{\omega}t}T(t)x & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

jest elementem $L^p(\mathbb{R}; X)$ dla wszystkich $x \in X$ i $1 \leq p \leq \infty$. Ponadto (4.2) i tożsamość rezolwenty dają

$$m(\xi)\mathcal{F}f(\xi) = (I_X + (\widetilde{\omega} - \omega)R(\omega + i\xi, A))R(\widetilde{\omega} + i\xi, A)x = R(\omega + i\xi, A)x.$$

Zatem dla $x \in D((-A)^\alpha)$ dla $\alpha > 1$ możemy zastosować (4.7), aby użyć odwrotnej transformaty Fouriera w (4.3), by otrzymać

$$e^{-\omega t}T(t)x = \mathcal{F}^{-1}(m \cdot \mathcal{F}f)(t) = T_m(f)(t) \tag{4.13}$$

dla $t \geq 0$. To z kolei daje (4.4) dla x jak wyżej. Jeśli m jest ograniczonym $(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^p(\mathbb{R}^n; X))$ mnożnikiem Fouriera dla pewnego $p \in [1, \infty]$, to nietrudno połączyć (4.13) z gęstością $D((-A)^\alpha)$ w X,

by uzyskać (4.4) dla każdego $x \in X$. Ten abstrakcyjny związek między teorią mnożników Fouriera a asymptotyczną teorią równań ewolucyjnych można znaleźć np. w [54], choć równoważne sformułowanie w języku konwolucji sięga znacznie dawniej (porównaj np. [76, Rozdział 3.3]).

Jeśli X jest przestrzenią Hilberta, to twierdzenie Plancherela i (4.6) implikują, że $m \in \mathcal{M}_{2,2}(X, X)$, odzyskując w ten sposób twierdzenie Gearharta-Prüssa. Jednakże argument ten nie działa, gdy X nie jest przestrzenią Hilberta. Z drugiej strony większość przestrzeni, które pojawiają się w zastosowaniach do równań nieliniowych są same w sobie przestrzeniami L^q nad pewną przestrzenią miary, a dla $1 < q < \infty$ są to przestrzenie UMD. Zatem naturalnym wydaje się usiłowanie zastosowania twierdzenia Weisa. Niestety pomimo że założenie (4.10) jest naturalne dla teorii maksymalnej regularności, nie jest ono szczególnie użyteczne w zastosowaniach do asymptotycznej teorii półgrup. Istotnie założenie, że

$$\{\xi m'(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{-i(\widetilde{\omega} - \omega)\xi R(\omega + i\xi, A)^2 \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathcal{L}(X)$$

jest R-ograniczony lub choćby jednostajnie ograniczony, jest bliskie założeniu, że A generuje półgrupę analityczną. Co więcej, (wykładnicza) asymptotyczna teoria półgrup analitycznych jest dobrze zbadana i znacznie łatwiejsza od przypadku ogólnego, porównaj [6, Twierdzenie 5.1.12].

Przez długi czas przeszkoda ta oznaczała, że mnożniki Fouriera były mało użyteczne w zastosowaniach praktycznych do asymptotycznej teorii równań ewolucyjnych.

4.4. **Dotychczasowe wyniki nt. (P2).** Badania nad doprecyzowaniem zachowania asymptotycznego pojawiły się w naturalny sposób w zastosowaniach do zaburzonych równań falowych, co wyjaśniamy poniżej

Opis problemu. Mówimy, że podzbiór U zwartej spójnej rozmaitości riemannowskiej M bez brzegu spełnia *warunek sterowalności geometrycznej*, jeśli istnieje $L > 0$, takie że każda geodezyjna długości co najmniej L przecina U. Rauch i Taylor pokazali w [67], że energia rozwiązań zaburzonego równania falowego z gładką niezerową funkcją zaburzającą $b : M \to [0, \infty)$, maleje wykładniczo, gdy zbiór $\{x \in M \mid b(x) > 0\}$ spełnia warunek sterowalności geometrycznej. Z [66] wynika, że warunek sterowalności geometrycznej jest także konieczny dla wykładniczego zaniku energii i podobne własności zachodzą dla rozmaitości z brzegiem (porównaj [11] i [22]). Ponadto łatwo skonstruować przykłady, gdzie obszar zaburzenia nie spełnia warunku sterowalności geometrycznej - wystarczy upewnić się, że zaburzanie nie występuje w pewnym otwartym otoczeniu co najmniej jednej geodezyjnej.

Przy formułowaniu nietrywialnego zaburzonego równania falowego jako równania ewolucyjnego na $X = L^2(M)$ półgrupa rozwiązań $(T(t))_{t \geq 0}$ jest jednostajnie ograniczona, jej generator A spełnia $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ i dla każdego $x \in X$ mamy $T(t)x \to 0$ gdy $t \to \infty$. Jednakże warunek jednostajnej ograniczoności (4.5) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy obszar zaburzenia spełnia warunek sterowalności geometrycznej. Stąd gdy warunek ten nie jest spełniony, argumenty poprzedniego rozdziału nie stosują się i spodziewamy się napotkać bardziej wyszukany zanik (porównaj np. [4, 21, 56]).

Mówiąc heurystycznie, z (4.3) dla $\omega = 0$ otrzymujemy, że tempa wzrostu rezolwenty są odwrotnie proporcjonalne do temp spadku półgrupy. Jednakże jeśli chcieć sformalizować tę heurystykę, napotykamy dwie przeszkody. Po pierwsze, w ogólności nie możemy oczekiwać jednostajnego tempa zaniku dla każdego $x \in X$, gdyż prosty argument pokazuje, że taki zanik jednostajny implikowałby zanik wykładniczy i (4.5). Zatem naturalnym wydaje się rozważenie warunku początkowego $x \in D(A)$, dla którego orbita półgrupy $t \mapsto T(t)x$ jest klasycznym rozwiązaniem odpowiadającego abstrakcyjnego zagadnienia Cauchy'ego (4.1). Po drugie, generator półgrupy rozwiązań zaburzonego równania falowego nie jest operatorem normalnym, więc precyzyjne określenie zależności między tempami zaniku dla półgrupy i tempami wzrostu dla rezolwenty nie jest trywialne.

Zauważmy, że określenie zależności między tempami wzrostu rezolwenty i tempami zaniku jest niezwykle ważne w praktyce. Istotnie, jak pokazaliśmy wcześniej, znacznie łatwiej jest badać rezolwentę niż półgrupę i w zastosowaniach praktycznych zazwyczaj uzyskujemy odpowiednie ograniczenia na normę rezolwenty. Dzięki nim otrzymujemy tempa zaniku dla klasycznych rozwiązań równania ewolucyjnego i staramy się zrozumieć, jakie dokładnie tempo zaniku odpowiada zaobserwowanemu tempu wzrostu rezolwenty.

Spróbujmy sprecyzować ten opis. Niech A generuje jednostajnie ograniczoną C_0-półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$, taką że $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ i niech $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie jak w (P2). Mamy wtedy $M(\lambda) \to \infty$ gdy $\lambda \to \infty$ i

$$\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Aby określić tempa zaniku klasycznych rozwiązań (4.1), musimy otrzymać oszacowania na normę $\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$, gdyż

$$\|T(t)x\|_X \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax\|_X \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_{D(A)}.$$

Dotychczasowe wyniki. Batkai, Engel, Prüss i Schnaubelt otrzymali w [12] pewne wczesne wyniki dotyczące związku między tempami wzrostu M i tempami zaniku dla półgrupy. Autorzy rozważali M, dla których $M(\lambda) \eqsim \lambda^\alpha$ gdy $\lambda \to \infty$ dla pewnego $\alpha > 0$. Pokazali, że wówczas (4.14) implikuje, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $C_\varepsilon > 0$, takie że

$$\|T(t)A^{-1}\|_X \leq C_\varepsilon \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon}}, \quad t \to \infty.$$

Udowodnili także implikację odwrotną, ponownie ze stratą rzędu wielomianowego ε. Lepsze oszacowania dla przestrzeni Hilberta otrzymali Liu i Rao w [57].

Wspomniane wczesne wyniki zostały poprawione przez Batty'ego i Duyckaertsa w [14] przy użyciu podejścia teorii tauberowskiej. Załóżmy bez utraty ogólności rozważań, że

$$M(\lambda) = \sup_{|\xi|\leq\lambda} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \lambda \geq 0,$$

i przyjmijmy

$$M_{\log}(\lambda) := M(\lambda)\big(\log(1 + M(\lambda)) + \log(1 + \lambda)\big), \quad \lambda \geq 0.$$

Ponieważ M i $M_{\log}$ są niemalejące, mają (być może więcej niż jedne) prawostronne elementy odwrotne M^{-1} i $M_{\log}^{-1}$ odpowiednio. Batty i Duyckaerts pokazali, że istnieją $c, C > 0$, takie że

$$\frac{c}{M^{-1}(Ct)} \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{M_{\log}^{-1}(ct)} \tag{4.15}$$

dla odpowiednio dużych t. Dla wielomianowych M lewa strona różni się od prawej o czynnik logarytmiczny. Postawili oni także hipotezę, że ograniczenie z prawej strony w (4.15) jest ostre na ogólnych przestrzeniach Banacha, ale że można je poprawić na przestrzeniach Hilberta.

Ich hipoteza została w większości udowodniona przez Boricheva i Tomilova w nowatorskiej pracy [20]. Pokazali oni, że istotnie nie można poprawić prawej strony (4.15) dla ogólnych przestrzeni Banacha. Co więcej, jeśli X jest przestrzenią Hilberta i jeśli $M(\lambda) \eqsim \lambda^\alpha$ dla $\lambda \geq 1$, to

$$\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{M^{-1}(ct)} \tag{4.16}$$

dla pewnych $c, C > 0$ i odpowiednio dużych t. W połączeniu z lewą stroną (4.15) pokazuje to z dokładnością do stałych, jakiego najlepszego tempa zaniku możemy oczekiwać w klasycznym rozwiązaniu: mamy $\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \eqsim t^{-1/\alpha}$ gdy $t \to \infty$. Praca ta była szeroko wykorzystywana do uzyskania temp zaniku dla zaburzonych równań falowych (porównaj np. odwołania w [13]).

Zauważmy, że choć przypadek wielomianowo rosnącego M jest najbardziej interesujący z punktu widzenia zastosowań, [20] nie odpowiada w pełni na hipotezę Batty'ego i Duyckaertsa. Z drugiej strony możemy skonstruować przykłady, które pokazują, że (4.16) nie zachodzi na przestrzeniach Hilberta dla każdego M, nawet jeśli założymy, że $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą normalną. Określenie, dla jakich M (4.16) zachodzi, pozostało więc problemem otwartym. W [13] Batty, Chill i Tomilov użyli zaawansowanych narzędzi teorii rachunku funkcyjnego, aby uzyskać (4.16) dla pewnych tzw. *regularnie zmieniających się* M - klasy, która zawiera w sobie wielomiany. Pokazali również, że (4.16) zachodzi dla każdej półgrupy normalnej $(T(t))_{t\geq 0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy M ma własność nazywaną *dodatnim wzrostem*. Własności te wprowadzamy w Definicji 4.12, ale chcielibyśmy tu zaznaczyć, że każda regularnie zmieniająca się

funkcja (o dodatnim indeksie) ma dodatni wzrost. Ponadto każda funkcja M rozważana w [13] jest regularnie zmieniająca się.

Zauważmy ponownie, że w zastosowaniach ważnym jest określenie, dla jakich M (4.16) zachodzi, ponieważ łącząc (4.16) z lewą stroną (4.15), otrzymujemy dokładne tempo zaniku dla klasycznych rozwiązań stowarzyszonego abstrakcyjnego zagadnienia Cauchy'ego. Mimo to po wynikach [13] nie było jasne, jak dalej postępować przy tym problemie. Ponadto nie było też jasne, jak tak subtelne zachowanie asymptotyczne odnosi się do teorii mnożników Fouriera o wartościach operatorowych, która w naturalny sposób pojawia się w (P1) przy rozważaniu wykładniczego zaniku półgrup.

4.5. **Spis osiągnięć.** Artykuły (R1)-(R5) w sumie skupiają następujące osiągnięcia:

(O1) Wykształcenie teorii mnożników Fouriera (L^p, L^q) o wartościach w przestrzeni operatorów w przypadku $p \neq q$,

(O2) Zastosowanie tejże teorii do Problemu (P1), by wskazać, jak można użyć mnożników Fouriera do uzyskania konkretnych temp zaniku na przestrzeniach Banacha nie będących przestrzeniami Hilberta,

(O3) Powiązanie teorii mnożników Fouriera z wartościami operatorowymi z doprecyzowanym zanikiem w Problemie (P2), otrzymując w ten sposób nowe konkretne tempa zaniku,

(O4) Użycie tychże mnożników Fouriera o wartościach operatorowych do uzyskania precyzyjnych temp wzrostu dla półgrup, mając jedynie założenia spektralne na stowarzyszony generator,

(O5) Znalezienie pełnej odpowiedzi na hipotezę Batty'ego i Duyckaertsa poprzez określenie funkcji M, dla których (4.16) zachodzi dla wszystkich półgrup na przestrzeniach Hilberta oraz poprawienie prawej strony (4.15) dla klasy funkcji, dla których (4.16) nie zachodzi.

Poniżej opisujemy, jak osiągnęliśmy te wyniki we wspomnianych artykułach.

4.6. **Cel (O1).** W 2015 roku Veraar wraz z autorem spostrzegli, że kilka znanych wyników nt. Problemu (P1), które uzyskano przy użyciu zasadniczo różnych metod, można udowodnić w ujednolicony sposób formułując je w terminach własności mnożników Fouriera (L^p, L^q) rezolwenty. Dało to także nowe wyniki dotyczące wykładniczej stabilności półgrup na przestrzeniach Banacha nie będących przestrzeniami Hilberta. Jednakże wówczas niewiele było wiadomo o teorii mnożników Fouriera (L^p, L^q) o wartościach operatorowych, zapewne z powodów, które tłumaczymy poniżej. Stąd Veraar i autor postanowili wykształcić taką teorię w artykułach (R4) i (R5). Artykuł (R4) skupia się na mnożnikach Fouriera o wartościach operatorowych pomiędzy $L^p(\mathbb{R}^n; X)$ a $L^q(\mathbb{R}^n; Y)$ dla przestrzeni Banacha X i Y, a (R5) zawiera podobne wyniki co (R4) dla mnożników Fouriera między odpowiednimi przestrzeniami Besova. Mnożniki drugiego typu pojawiają się w naturalny sposób, gdy rozważamy pewne przypadki końcowe w teorii (L^p, L^q), co wyjaśniamy poniżej.

Mnożniki Fouriera o wartościach operatorowych. W przypadku skalarnym, teoria mnożników Fouriera $(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$ dla $p \neq q$ jest stosunkowo prosta. Jeśli $p > q$, to jedynym ograniczonym mnożnikiem Fouriera z $L^p(\mathbb{R}^n)$ do $L^q(\mathbb{R}^n)$ jest operator zerowy. Co więcej, z grubsza rzecz biorąc, aby otrzymać ograniczoność dla istotnie dużej klasy mnożników Fouriera, musimy mieć $p \leq 2 \leq q$ (porównaj [45]). Niech wtedy $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ będzie mierzalne, takie że

$$\sup_{\xi \neq 0} |\xi|^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} |m(\xi)| < \infty. \tag{4.17}$$

Dla $s \in \mathbb{R}$ przez $|D|^s$ rozumiemy mnożnik Fouriera z symbolem $\xi \mapsto |\xi|^s$. Niech $s_1, s_2 \in [1, \infty]$ będą takie, że $\frac{1}{s_1} = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ i $\frac{1}{s_2} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ oraz niech $\dot{H}^p_{s_1}(\mathbb{R}^n) = |D|^{-s_1} L^p(\mathbb{R}^n)$ i $\dot{H}^2_{s_2}(\mathbb{R}^n) = |D|^{-s_2} L^q(\mathbb{R}^n)$ będą jednorodnymi przestrzeniami potencjałów Bessela[1]. Wówczas możemy użyć zanurzeń Soboleva,

[1] Używamy tejże terminologii zamiast częściej spotykanych „jednorodnych przestrzeni Soboleva", gdyż w przypadku wartości wektorowych przestrzenie potencjałów Bessela na ogół nie pokrywają się z przestrzeniami Soboleva zdefiniowanymi w klasycznym sensie.

twierdzenia Plancherela i (4.17), by otrzymać

$$\begin{aligned}\|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|T_m(f)\|_{\dot{H}^2_{s_2}(\mathbb{R}^n)} = \big\||D|^{s_2}T_m(f)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \big\||D|^{-s_1}f\big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \big\|f\big\|_{\dot{H}^2_{-s_1}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pokazując w ten sposób, że $T_m : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ jest ograniczony. Zauważmy, że w przeciwieństwie do przypadku $p = q \neq 2$ nie uzyskujemy tutaj gładkości m dla otrzymanego twierdzenia o mnożnikach. Mimo że można uzyskać bardziej wyszukane wyniki, procedura ta już daje liczną klasę użytecznych mnożników Fouriera $(L^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n))$.

Ta sama metoda działa dla mnożników $(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^q(\mathbb{R}^n; Y))$ dla symboli z wartościami operatorowymi $m : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(X, Y)$, o ile X i Y są przestrzeniami Hilberta. Jednakże w tym wypadku zazwyczaj bardziej użyteczne jest użycie twierdzenia Plancherela dla $p = q = 2$. Z drugiej strony jeśli X lub Y nie jest przestrzenią Hilberta, to podejście to zasadniczo psuje się.

Możliwe, iż niewiele było wiadomo o mnożnikach Fouriera $(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^q(\mathbb{R}^n; Y))$ z wartościami operatorowymi z trzech powodów. Po pierwsze, teoria ta jest stosunkowo prosta dla $X = Y = \mathbb{C}$. Po drugie, nie było jasne, jakie zastosowania miałaby taka teoria. Po trzecie, nie było jasne, jak podejść do faktu, iż techniki przypadku skalarnego najwyraźniej psują się w sposób zasadniczy.

Mimo to, uogólnienie teorii skalarnych mnożników Fouriera (L^p, L^q) do przypadku wartości wektorowych okazuje się możliwe pod warunkiem odpowiednich geometrycznych założeń na bazowe przestrzenie Banacha. Co ciekawe, założenie przestrzeni UMD, które jest kluczowe dla teorii wartości wektorowych gdy $p = q$, nie odgrywa prawie żadnej roli gdy $p \neq q$. Zamiast tego geometria przestrzeni bazowych X i Y pochodzi z własności takich jak typ Fouriera, typ, czy kotyp. Własności te są w pewnym sensie bardziej „ilościowe" niż własność UMD, gdyż zawierają parametry $p_X \in [1, 2]$ and $q_Y \in [2, \infty]$, które z kolei są powiązane z wartościami p i q, dla których możemy otrzymać twierdzenia o mnożnikach $(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^q(\mathbb{R}^n; Y))$.

Konkretne wyniki. Możemy użyć różnych technik, aby przedłużyć teorię skalarną do przypadku wartości wektorowych. Skupimy się tutaj na dwóch takich przedłużeniach. Pierwsze zawarte w Stwierdzeniu 3.9 w (R4) jest proste do udowodnienia, ale mimo to dość użyteczne w zastosowaniach. Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *typ Fouriera* $p \in [1, 2]$, jeśli $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n; X) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n; X)$ w sposób ograniczony. Przypomnijmy też, że przyjmujemy $m \in \mathcal{M}_{p,q}(X, Y)$, gdy $T_m : L^p(\mathbb{R}^n; X) \to L^q(\mathbb{R}^n; Y)$ jest ograniczony.

Stwierdzenie 4.1. *Niech X będzie przestrzenią Banacha z typem Fouriera $p \in [1, 2]$ i niech Y będzie przestrzenią Banacha z typem Fouriera q' dla $q \in [2, \infty]$. Niech $r \in [1, \infty]$ będzie takie, że $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ i niech $m : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(X, Y)$ będzie silnie mierzalne i takie, że $[\xi \mapsto \|m(\xi)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}] \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $m \in \mathcal{M}_{p,q}(X, Y)$.*

Dowód. Ponieważ $\frac{1}{r} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{p'}$, możemy użyć nierówności Höldera i założeń na X i Y, by otrzymać

$$\|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n;Y)} \lesssim \|m\mathcal{F}(f)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n;Y)} \lesssim \|\mathcal{F}(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n;X)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)}$$

dla każdego $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; X)$. □

Zauważmy, że założenie na m jest spełnione, gdy istnieje $\varepsilon > 0$, takie że

$$\sup_{\xi \neq 0} \max(|\xi|, |\xi|^{-1})^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\varepsilon} \|m(\xi)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty, \tag{4.19}$$

dając tym samym przedłużenie (4.17) ze stratą rzędu ε.

Nasz drugi wynik zawiera inny analog warunku (4.17). Jego wynik jest bliżej związany z podejściem w przypadku skalarnym i używa pojęć typu i kotypu przestrzeni Banacha (porównaj [47]). Mimo że nie możemy polegać bezpośrednio na twierdzeniu Plancherela gdy X i Y nie są przestrzeniami Hilberta, Kalton i Weis zauważyli, że istnieją sposoby na wprowadzenie struktury przestrzeni Hilberta na ogólnych przestrzeniach Banacha. Dokładniej rzecz ujmując, używamy w tym celu teorii *operatorów γ-radonujących* (porównaj [50, 78]), wykorzystującej przestrzenie funkcyjne $\gamma(\mathbb{R}^n; X)$ i $\gamma(\mathbb{R}^n; Y)$, na

których dostępne są odpowiedniki twierdzenia Plancherela, jak również inne własności pochodzące z przypadku przestrzeni Hilberta. Co więcej, przy założeniach na typ i kotyp X i Y wspomniane γ-przestrzenie zanurzają się w klasycznych skalach $\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n;X)$ i $\dot{H}^t_q(\mathbb{R}^n;X)$ przestrzeni potencjałów Bessela [79]. Wówczas używając podobnego argumentu co w (4.18), można udowodnić następujący wynik - Twierdzenie 3.18 w (R4).

Twierdzenie 4.2. *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, takimi że X ma typ $p_0 \in (1,2]$, a Y ma kotyp $q_0 \in [2,\infty)$. Niech $p \in (1,p_0)$ i $q \in (q_0,\infty)$ oraz niech $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathcal{L}(X,Y)$ będzie silnie mierzalne, takie że zbiór*

$$\big\{|\xi|^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}m(\xi)\,\big|\,\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y) \tag{4.20}$$

jest R-ograniczony. Wówczas $m \in \mathcal{M}_{p,q}(X,Y)$. Jeśli $p_0 = 2$ lub $q_0 = 2$, to możemy przyjąć odpowiednio $p = p_0$ lub $q = q_0$.

Założenia na typ i kotyp w Twierdzeniu 4.2 są (z dokładnością do straty rzędu ε) konieczne (porównaj Rozdział 3.6 w (R4)). Założenie R-ograniczoności na (4.20) stosuje się, aby mieć pewność, że przemnażanie przez m odwzorowuje $\gamma(\mathbb{R}^n;X)$ w $\gamma(\mathbb{R}^n;Y)$. Założenie to jest również konieczne w ogólnym przypadku. Jednakże jeśli $X = Y$ i m jest symbolem o wartościach skalarnych, działającym na X przez mnożenie, to warunek R-ograniczoności na (4.20) redukuje się do założenia (4.17) dzięki zasadzie kontrakcji Kahane'a. Okazuje się, że nawet dla takich mnożników o wartościach skalarnych Twierdzenie 4.2 było nowością w przypadku wartości wektorowych.

Nie jest jasne, czy możemy przyjąć $p = p_0$ lub $q = q_0$ w Twierdzeniu 4.2 odpowiednio dla $p_0 < 2$ lub $q_0 > 2$. Stąd wynik ten wydaje się dawać podobną stratę rzędu ε w odniesieniu do (4.17) co Stwierdzenie 4.1 i z dodatkowym założeniem R-ograniczoności. Jednakże mimo iż pojęcia typu Fouriera, typu i kotypu są blisko związane, nie są one tożsame. Przykładowo jeśli $X = L^\sigma(\Omega)$ dla przestrzeni miary Ω i $\sigma \in [1,\infty)$, to X ma typ Fouriera $p = \min(\sigma,\sigma')$, typ $p_0 = \min(\sigma,2)$ i kotyp $q_0 = \max(\sigma',2)$. Oznacza to, że dla przestrzeni Lebesgue'a, które pojawiają się najczęściej w zastosowaniach, założenie na zanik m w Twierdzeniu 4.2 jest wyraźnie słabsze niż to w Stwierdzeniu 4.1.

Przestrzenie Besova. Możliwym jest uniknięcie straty rzędu ε w (4.19) i Twierdzeniu 4.2 dzięki przestrzeniom Besova o wartościach wektorowych (po więcej informacji na ich temat porównaj np. [2]). Mnożniki Fouriera o wartościach operatorowych na przestrzeniach Besova były badane w [34, 46], ale tam symbole spełniają warianty twierdzenia Mikhlina, a operatory działają między przestrzeniami $B^s_{p,v}(\mathbb{R}^n;X)$ a $B^s_{p,v}(\mathbb{R}^n;Y)$ dla $s \in \mathbb{R}$ i $p,v \in [1,\infty]$. Spojrzenie to możemy rozumieć jako odpowiednik przestrzeni Besova mnożników Fouriera (L^p,L^p), choć na przestrzeniach Besova warunek UMD nie gra żadnej roli [2] i we wspomnianych pracach jest zastąpiony przez założenia na typ Fouriera bazowych przestrzeni.

W (R5) Veraar i autor otrzymali odpowiedniki naszych wyników dotyczacych mnożników Fouriera (L^p,L^q) dla przestrzeni Besova. Ponownie rozpatrujemy zarówno założenia na typ Fouriera przestrzeni bazowych, jak i założenia na typ i kotyp. Szczególny przypadek naszego wyniku jest następujący.

Twierdzenie 4.3. *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, takimi że X ma typ $p \in [1,2]$, a Y ma kotyp $q \in [2,\infty]$. Niech $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathcal{L}(X,Y)$ będzie silnie mierzalne i takie, że zbiór*

$$\big\{m(\xi)\,\big|\,\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big\} \subseteq \mathcal{L}(X,Y) \tag{4.21}$$

jest R-ograniczony. Wówczas $T_m : B^s_{p,v}(\mathbb{R}^n;X) \to B^{s-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}_{q,v}(\mathbb{R}^n;Y)$ jest ograniczony dla każdego $s \in \mathbb{R}$ i $v \in [1,\infty]$.

Zauważmy, że istotnie nie otrzymujemy ε-straty w (4.21) w odniesieniu do założeń geometrycznych na X i Y. De facto przy użyciu zanurzeń między przestrzeniami Besova a przestrzeniami potencjałów Bessela Twierdzenie 4.3 daje twierdzenie o mnożnikach (L^p,L^q), które dotyczy krytycznych wykładników $p = p_0$ i $q = q_0$ w Twierdzeniu 4.2, ale zawiera ono silniejszy warunek niż (4.20) (porównaj Twierdzenie 4.6 w (R5)). Z drugiej strony, używając zanurzenia $B^0_{q,1}(\mathbb{R};X) \subseteq L^q(\mathbb{R};X)$ przy założeniach Twierdzenia 4.3, natychmiast otrzymujemy

$$T_m : B^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}_{p,1}(\mathbb{R};X) \to L^q(\mathbb{R};Y). \tag{4.22}$$

Możemy także znaleźć odpowiednik Stwierdzenia 4.1 w (R5), ponownie przy założeniach na typ Fouriera.

Dowód Twierdzenia 4.3 ponownie używa struktury przestrzeni Hilberta, która jest uchwycona przez przestrzenie $\gamma(\mathbb{R}^n; X)$ i $\gamma(\mathbb{R}^n; Y)$. Jednakże ε-strata w zanurzeniach tychże przestrzeni w skalę przestrzeni potencjałów Bessela, która z kolei daje stratę w Twierdzeniu 4.2, nie pojawia się dla funkcji ze zwartym nośnikiem Fouriera. Ponieważ norma przestrzeni Besova zawiera sumowanie po L^p-normach funkcji z nośnikiem Fouriera w diadycznych pierścieniach kołowych, możemy otrzymać ostrzejsze wyniki na zanurzenia γ-przestrzeni w skalę przestrzeni Besova [49]. To z kolei pozwala na zaostrzenie w Twierdzeniu 4.3.

Poza możliwością rozważenia krytycznych wykładników, które są często nieosiągalne w skali przestrzeni potencjałów Bessela, są też inne integralne zalety rozważania przestrzeni Besova. Przykładowo, ogólnie rzecz ujmując, orbity wagowe C_0-grup są elementami przestrzeni Besova, gdy dane początkowe pochodzą z odpowiedniej przestrzeni interpolacji. Fakt ten został powiązany z twierdzeniami o mnożnikach Fouriera na przestrzeniach Besova przez Haasego i autora w [39] oraz przez autora w (R10) poniżej, aby udowodnić nowe wyniki w teorii rachunku funkcyjnego. Twierdzenia o mnożnikach Fouriera na przestrzeniach Besova użyte w [70] pochodzą z (R5).

4.7. **Cel (O2).** Po udowodnieniu twierdzeń dla mnożników Fouriera (L^p, L^q) o wartościach operatorowych następnym krokiem jest zastosowanie ich do Problemu (P1), jak to zostało zrobione w (R3).

Mnożniki Fouriera. Naszym pierwszym głównym narzędziem jest następujący związek między wykładniczą stabilnością a mnożnikami Fouriera (L^p, L^q). Jest to szczególny przypadek ogólniejszego wyniku (porównaj np. [54] lub Twierdzenie 5.3 w (R3)).

Stwierdzenie 4.4. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Niech $\omega' \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \omega'$ oraz*

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda)\geq\omega'} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{4.23}$$

Niech $\alpha \geq 0$. Wówczas następujące warunki są sobie równoważne:

(1) Dla każdego $\omega > \omega'$ istnieją $p, q \in [1, \infty]$, takie że operator mnożnika Fouriera z symbolem $\xi \mapsto R(\omega + i\xi, A)$ jest ograniczony z $L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha))$ do $L^q(\mathbb{R}; X)$;

(2) Dla każdego $\omega > \omega'$ istnieje $C \geq 0$, takie że $\|T(t)x\|_X \leq Ce^{-\omega t}\|x\|_{D((-A)^\alpha)}$ dla każdego $x \in D((-A)^\alpha)$ i $t \geq 0$.

Jak zostało wspomniane w Rozdziale 4.2, argument szeregu Neumanna pokazuje, że (4.23) zachodzi dla pewnych $\omega' < 0$ jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ jest jednostajnie ograniczony i $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.

Dowód implikacji (1)⇒(2) wynika z zarysu przedstawionego w rozdziale 4.3 z następującymi uwagami dodatkowymi. Po pierwsze, ponieważ nie zakładaliśmy w Stwierdzeniu 4.4, że $(T(t))_{t\geq 0}$ jest jednostajnie ograniczona, musimy wybrać $\widetilde{\omega} > 0$ w (4.11) i (4.12), takie że $(e^{-\widetilde{\omega}t}T(t))_{t\geq 0}$ jest wykładniczo stabilna. Co więcej, można pokazać, że jeśli zachodzi (1), to mnożnik Fouriera z symbolem jak w (4.11) jest de facto ograniczony z $L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha)) \cap L^1(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha))$ do $L^\infty(\mathbb{R}; X)$. Ponieważ f zdefiniowane jak w (4.12) jest elementem $L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha)) \cap L^1(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha))$, (4.13) kończy wówczas dowód. Implikacja (2)⇒(1) wynika z (4.3) i nierówności Younga dla konwolucji.

Stwierdzenie 4.4 wydaje się dawać narzędzie do rozwiązania Problemu (P1). Jednakże zastosowania Stwierdzenia 4.4 przede wszystkim skupiały się na próbach ustalenia (1) z $p = q$, a w tym wypadku istniejące twierdzenia o mnożnikach Fouriera nie dają użytecznych wniosków dla $\alpha \in (0, 1)$. Z drugiej strony techniki wykształcone do Celu (O1) pozwalają podejść do tegoż problemu w nowatorski sposób.

Aby móc zastosować wyniki Celu (O1), takich jak Stwierdzenie 4.1 czy Twierdzenie 4.2, musimy otrzymać wystarczający zanik symbolu $\xi \mapsto R(\omega+i\xi, A)$ jako operatora z $D((-A)^\alpha)$ do X. Na pierwszy rzut oka (4.23) nie wydaje się dawać jakiegokolwiek zaniku. Jednakże istotnie taki otrzymujemy w konsekwencji następującego lematu (porównaj np. [80, Lemat 3.3] lub Stwierdzenie 3.4 w (R3)), które jest naszym drugim głównym narzędziu do badania Celu (O2).

Lemat 4.5. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Niech $\omega' \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \omega'$ oraz*

$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda)\geq\omega'} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{4.24}$$

Wówczas dla wszystkich $\omega \geq \omega'$ i $\alpha \in [0,1]$ istnieje $C \geq 0$, takie że

$$\|R(\omega + i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(D((-A)^\alpha),X)} \leq C(1+|\xi|)^{-\alpha} \tag{4.25}$$

dla każdego $\xi \in \mathbb{R}$.

De facto (4.24) i (4.25) są równoważne, ale potrzebować będziemy jedynie implikacji w Lemacie 4.5. Podobne stwierdzenie zachodzi, gdy zamienimy jednostajne ograniczenia na R-ograniczenia. Lematu 4.5 można dowieść oszacowując wartości całek brzegowych, które pojawiają się w przedstawieniu rezolwenty w języku rachunku funkcyjnego.

Konkretne wyniki. Dotarliśmy do momentu, w którym możemy połączyć wszystkie narzędzia, otrzymując w ten sposób następujące nowatorskie podejście do Problemu (P1):

(1) Użycie Lematu 4.5 do otrzymania zaniku rezolwenty jak w (4.25);
(2) Zastosowanie twierdzeń o mnożnikach Fouriera z Rozdziału 4.3 do symbolu $\xi \mapsto R(\omega'+i\xi, A) \in \mathcal{L}(D((-A)^\alpha), X)$;
(3) Użycie Stwierdzenia 4.4, aby wywnioskować, że $\|T(t)x\|_X \lesssim e^{-\omega t}\|x\|_{D((-A)^\alpha)}$ dla pewnych $\omega < 0$ i wszystkich $x \in D((-A)^\alpha)$ i $t \geq 0$.

Zauważmy, że tempo zaniku wymagane w twierdzeniach Rozdziału 4.6 zależy od geometrii X (dziedziny ułamkowe $D((-A)^\alpha)$ dziedziczą tą geometrię), która z kolei określa wartość α w (3).

Jednym z wyników, jakie otrzymujemy w ten sposób przy użyciu Stwierdzenia 4.1, jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.6. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X z typem Fouriera $p \in [1,2]$. Załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ oraz że $\sup_{\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. Wówczas istnieją $C \geq 0$ i $\omega < 0$, takie że*

$$\|T(t)x\|_X \leq Ce^{-\omega t}\|x\|_{D((-A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}})} \tag{4.26}$$

dla wszystkich $x \in D((-A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}})$ i $t \geq 0$.

Czytelnik mógł zauważyć, że jeśli $p \in (1,2)$, to Stwierdzenie 4.1 daje jedynie $\|T(t)x\|_X \leq Ce^{-\omega t}\|x\|_{D((-A)^\alpha)}$ dla $1 \geq \alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$. Jednakże zachodzi lemat ciągłości (porównaj [80, Lemat 3.5] lub Lemat 5.1 w (R3)), który implikuje (4.26), a przypadek $p = 1$ można pokazać osobno. Twierdzenie 4.6 otrzymano oryginalnie w [82], a w [80] zostało ono udowodnione przy wykorzystaniu podejścia podobnego do naszegu, ale używając wariantu twierdzenia Mikhlina o mnożnikach na przestrzeniach Besova. Nasz dowód opiera się o znacznie prostsze Stwierdzenie 4.1.

Twierdzenie 4.2 z kolei daje wariant Twierdzenia 4.6 przy założeniach na typ i kotyp bazowych przestrzeni Banacha oraz przy założeniu R-ograniczoności rezolwenty (porównaj Twierdzenie 5.4 w (R3)). Wynik ten otrzymano w [77], używając innego podejścia. Nasze metody dają dodatkowe wyniki, np. dla dodatnich półgrup, z których niektóre były udowodnione wcześniej w inny sposób, a niektóre są nowe.

4.8. **Cel (O3).** Pokazaliśmy, że mnożniki Fouriera (L^p, L^q) dają ujednolicony sposób na podejście do problemu wykładniczej stabilności, jak i upraszczają wiele zasadniczo różnych dowodów. Jednakże związek między mnożnikami Fouriera a teorią stabilności wykładniczej, jak również większość wyników dotyczących stabilności, które otrzymaliśmy naszymi metodami, były już wcześniej znane. Nie jest już tak jednak w przypadku doprecyzowanych temp zaniku w Problemie (P2). Przykładowo nie było jasne, jak teoria mnożników Fouriera wiąże się z wielomianowymi tempami zaniku dla orbit półgrupy z wartościami początkowymi w dziedzinie odpowiedniej ułamkowej potęgi generatora. Jednym z głównych osiągnięć (R3) było powiązanie stabilności wielomianowej z mnożnikami Fouriera (L^p, L^q) oraz

późniejsze połączenie tegoż związku z twierdzeniami Celu (O1), by otrzymać konkretne wielomianowe tempa zaniku, które uwzględniają geometrię przestrzeni bazowych.

W tym rozdziale, podobnie jak w Problemie (P2), rozważać będziemy C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ z generatorem A , takie że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Jednakże tym razem *nie* będziemy ograniczać się do przypadku $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. Jak wspomnieliśmy w Rozdziale 4.4, zaburzone równania falowe generują półgrupy, gdzie zamiast tego mamy $\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \eqsim (1 + |\xi|)^\beta$ dla pewnego $\beta > 0$ i wszystkich $\xi \in \mathbb{R}$ oraz gdzie spodziewamy się zaobserwować wielomianowe tempa zaniku dla orbit $t \mapsto T(t)x$ jeśli $x \in D(A)$. De facto (R3) skupia się także na przypadku, gdy $0 \in \sigma(A)$ i rezolwenta wybucha wielomianowo w otoczeniu zera, ale dla prostoty nie będziemy tu roważać tego przypadku.

Mnożniki Fouriera. Okazuje się, że z takimi doprecyzowanymi formami zachowania asymptotycznego możemy poradzić sobie w podobny sposób co w Rozdziale 4.7, choć aby tego dokonać, musimy zmodyfikować Stwierdzenie 4.4 i Lemat 4.5. Przedłużenie Stwierdzenia 4.4, tj. Twierdzenie 4.6 w (R3), wygląda następująco.

Twierdzenie 4.7. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że istnieją $\beta, C' \geq 0$, takie że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ oraz*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C'(1 + |\lambda|)^\beta. \tag{4.27}$$

Niech $\alpha \geq 0$ i $n \in \mathbb{Z}_+$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) Dla każdego $k \in \{1, \dots, n + 1\}$ istnieją $p, q \in [1, \infty]$, takie że operator mnożnika Fouriera z symbolem $\xi \mapsto R(i\xi, A)^k$ jest ograniczony z $L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha)$ do $L^q(\mathbb{R}; X)$;
(2) Istnieje $C \geq 0$, takie że $\|T(t)x\|_X \leq Ct^{-n}\|x\|_{D((-A)^\alpha)}$ dla wszystkich $x \in D((-A)^\alpha)$ i $t \geq 1$.

W przeciwieństwie do charakteryzacji stabilności wykładniczej w Stwierdzeniu 4.4, Twierdzenie 4.7 wydaje się być nowym wynikiem. Zauważmy, że wykładnik β w Twierdzeniu 4.7 nie jest zbyt istotny - musimy jedynie założyć, że rezolwenta rośnie co najwyżej wielomianowo.

W celu udowodnienia Twierdzenia 4.7 postępujemy analogicznie do dowodu Stwierdzenia 4.4. Dla implikacji (1)⇒(2) zauważamy, że

$$\int_0^\infty e^{-i\xi t} t^n T(t)x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{(-i)^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} \int_0^\infty e^{-i\xi t} T(t)x \,\mathrm{d}t = n!(i\xi + A)^{-n-1}x \tag{4.28}$$

dla każdego $\xi \in \mathbb{R}$ i odpowiednich $x \in X$, co wynika z (4.3). Ponadto możemy wykorzystać fakt, iż (1) zachodzi dla każdego $k \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$, aby pokazać, że mnożnik Fouriera z symbolem $\xi \mapsto R(i\xi, A)^{n+1}$ jest ograniczony z $L^1(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha) \cap L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha)$ do $L^\infty(\mathbb{R}; X)$ (de facto używamy tu jedynie sformułowania dla $k \in \{n - 1, n, n + 1\} \cap \mathbb{N}$). Wówczas ponownie definiujemy f jak w (4.12) i używamy tożsamości rezolwenty oraz (4.28), by uzyskać (2). Implikacja (2)⇒(1) znowu bazuje na zastosowaniu nierówności Younga.

Dzięki przeskalowaniu Twierdzenie 4.7 de facto uogólnia Stwierdzenie 4.4. Jednakże w odróżnieniu do przypadku stabilności wykładniczej w Rozdziale 4.7, gdzie mnożniki Fouriera (L^p, L^q) z $p \neq q$ były użyte do uzyskania konkrentych oszacowań zaniku ze Stwierdzenia 4.4, tutaj przypadek $p \neq q$ jest wręcz konieczny dla *charakteryzacji* stabilności wielomianowej przy użyciu mnożników Fouriera. Istotnie wiadomo, że dowolny ograniczony mnożnik Fouriera (L^p, L^p) ma jednostajnie ograniczony symbol, podczas gdy zaburzone równania falowe generują jednostajnie ograniczone półgrupy, dla których $\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ nie jest jednostajnie ograniczona. Dla takich półgrup i dla $n = \alpha = 0$, (1) nie może zachodzić, jeśli $p = q$, podczas gdy (2) zachodzi. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że jeśli (1) zachodzi dla pewnych $p, q \in [1, \infty]$, to zachodzi także dla $p = 1$ i $q = \infty$.

Mając teraz do dyspozycji Twierdzenie 4.7, możemy przejść do kolejnego kroku, tj. przedłużenia Lematu 4.5 do ogólniejszego przypadku, kiedy to rezolwenta nie musi być jednostajnie ograniczona. Odpowiadające przedłużenie wygląda następująco.

Stwierdzenie 4.8. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że istnieją $\beta, C' \geq 0$, takie że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ oraz*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C'(1+|\lambda|)^{\beta}. \tag{4.29}$$

Wówczas dla każdego $\alpha \in [0,1]$ istnieje $C \geq 0$, takie że

$$\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(D((-A)^{\alpha+\beta}),X)} \leq C(1+|\xi|)^{-\alpha} \tag{4.30}$$

dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}$.

Ponownie, (4.29) jest de facto równoważne (4.30).

Konkretne wyniki. Możemy teraz powtórzyć procedurę z Rozdziału 4.7:

(1) Użycie Stwierdzenia 4.5, by otrzymać zanik rezolwenty jako operatora z $D((-A)^{\gamma})$ do X dla pewnego $\gamma \geq 0$;
(2) Zastosowanie twierdzeń o mnożnikach Fouriera z Rozdziału 4.3 do symbolu $\xi \mapsto R(\omega' + i\xi, A)^k \in \mathcal{L}(D((-A)^{\gamma}), X)$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, n+1\}$;
(3) Użycie Stwierdzenia 4.4, by wywnioskować, że $\|T(t)x\|_X \lesssim t^{-n}\|x\|_{D((-A)^{\gamma})}$ dla pewnego $\gamma \geq 0$ i wszystkich $x \in D((-A)^{\gamma})$ i $t \geq 1$.

Jak wspomnieliśmy wcześniej, w (2) potrzebujemy jedynie rozważyć $k \in \{n-1, n, n+1\} \cap \mathbb{N}$, ale w licznych zastosowaniach nie ma to znaczenia, gdyż wyraz dla $k = n+1$ jest najbardziej problematyczny. Istotnie aby zastosować twierdzenia o mnożnikach Fouriera z Rozdziału 4.6, dla odpowiedniego $\alpha \in [0,1]$, musimy wybrać $\gamma \geq 0$, by

$$\|R(i\xi, A)^k\|_{\mathcal{L}(D((-A)^{\gamma}),X)} \lesssim (1+|\xi|)^{-\alpha}$$

dla wszystkich $1 \leq k \leq n+1$ i $\xi \in \mathbb{R}$. Stwierdzenie 4.8 daje $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)A^{-\beta}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$. Stąd

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)^{k-1}\|_{\mathcal{L}(D((-A)^{(k-1)\beta}),X)} \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \|R(i\xi, A)A^{-\beta}\|^{k-1}_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Następnie, stosując Stwierdzenie 4.8 do obcięcia A do $D((-A)^{(k-1)\beta})$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|R(i\xi, A)^k\|_{\mathcal{L}(D((-A)^{k\beta+\alpha},X)} &\leq \|R(i\xi, A)^{k-1}\|_{\mathcal{L}(D((-A)^{(k-1)\beta},X)}\|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(D((-A)^{k\beta+\alpha},D((-A)^{(k-1)\beta})} \\ &\lesssim (1+|\xi|)^{-\alpha}\end{aligned}$$

dla wszystkich $1 \leq k \leq n+1$ i $\xi \in \mathbb{R}$. Łącząc to oszacowanie z krokami (1), (2) i (3) oraz używając lematu interpolacji (porównaj Lemat 4.2 w (R3)) do poradzenia sobie z faktem, iż Twierdzenie 4.7 zawiera jedynie $n \in \mathbb{Z}_+$, docieramy do następującego wyniku, Wniosku 4.11 w (R3).

Twierdzenie 4.9. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że istnieją $\beta, C' \geq 0$, takie że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ oraz $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C'(1+|\lambda|)^{\beta}$. Wówczas dla każdego $s \geq 0$ istnieje $C \geq 0$, takie że*

$$\|T(t)x\|_X \leq Ct^{-s}\|x\|_{D((-A)^{(s+1)\beta})}$$

dla każdego $x \in D((-A)^{(s+1)\beta})$ i $t \geq 1$.

Twierdzenie 4.9 jest ostre z dokładnością do ewentualnej ε-straty. Ogólniejsze wyniki zachodzą przy założeniach na typ Fouriera, typ i kotyp, ale nawet Twierdzenie 4.9 wydaje się być nowym wynikiem. Wariant Twierdzenia 4.9 na ogólnych przestrzeniach Banacha można znaleźć w [12], a w [72] można znaleźć pewne wyniki dotyczące dychotomii wielomianowych przy założeniach na typ Fouriera. W (R3) można ponadto znaleźć wariant Twierdzenia 4.9 zawierający wybuch wielomianowy rezolwenty w zerze dla półgrup analitycznych, przy czym de facto wariant ten zachodzi w ogólniejszym przypadku półgrup asymptotycznie analitycznych, które zawierają w sobie półgrupy różniczkowalne. Mimo że teoria stabilności wykładniczej dla półgrup analitycznych jest znana i stosunkowo prosta, nie wydaje się to prawdą dla wielomianowych temp zaniku i zgodnie z wiedzą autora analog Twierdzenia 4.9 dla półgrup analitycznych i wybuchu rezolwenty w zerze jest nowym wynikiem.

Zauważmy, że Twierdzenie 4.9 nie wymaga założeń na wzrost półgrupy - wymaga jedynie informacji spektralnych o generatorze. Pouczającym wydaje się porównanie tegoż wyniku z twierdzeniem Gearharta-Prüssa i jego uogólnieniami. Przykładowo niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Hilberta X. Załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ oraz $\sup_{\mathrm{Re}(\lambda)\geq\omega'} \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$ dla każdego $\omega' > 0$. Wówszas przeskalowany wariant Twierdzenia 4.6 z $p = 2$ daje

$$\|T(t)x\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim e^{\omega' t}\|x\|_X$$

dla wszystkich $\omega' > 0$, $x \in X$ i $t \geq 0$. Wynika to także z przeskalowanego wariantu Twierdzenia 4.9 z $\beta = 0$. Z drugiej strony jeśli $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ i jeśli wiemy, że rezolwenta wybucha wzdłuż osi urojonej w pewnym tempie wielomianowym, to Twierdzenie 4.9 określa dziedziny ułamkowe, dla których odpowiadające orbity półgrupy są ograniczone (dla $s = 0$) lub nawet zanikają wielomianowo. Stąd wyniki tego rozdziału poprawiają te z Rozdziału 4.7, oferując dodatkowe i doprecyzowane informacje.

Jak już wskazywaliśmy, wariant Twierdzenia 4.9 zachodzi w przypadku, gdy generator ma wybuch rezolwenty w zerze lub w zerze i nieskończoności jednocześnie. De facto te same metody pozwoliłyby rozważyć dowolną skończoną liczbę punktów spektralnych na osi urojonej i oczywiście możemy także przesunąć generator.

4.9. **Cel (O4).** W poprzednim rozdziale poprawiliśmy wyniki o stabilności wykładniczej z Rozdziału 4.7 dzięki otrzymaniu wielomianowych temp zaniku, mając bardziej precyzyjne informacje o zachowaniu rezolwenty, gdy zbliża się ona do nieskończoności (lub zera) wzdłuż pojedynczej prostej urojonej. W tym rozdziale poprawimy wyniki Rozdziału 4.7 w inny sposób. Nie będziemy zakładać, że oś urojona jest zawarta w zbiorze rezolwenty generatora, ale przyjmiemy jedynie, że wiadomo, ja rezolwenta wybucha wzdłuż prostych urojonych, gdy proste te zbliżają się do osi urojonej. W tym przypadku zamiast otrzymania temp zaniku dla orbit półgrupy w dziedzinach ułamkowych, możemy jedynie mieć nadzieję na doprecyzowanie zachowania *wzrostu* orbit, które opisaliśmy w Rozdziale 4.7. W (R2) pokazaliśmy, że problem ten ponownie może być związany z teorią mnożników Fouriera (L^p, L^q) i w konsekwencji możemy po raz kolejny otrzymać konkretne doprecyzowania temp wzrostu.

Opis problemu. Wyjaśnimy tenże opis dokładniej rozważając najpierw nieco odmienny problem. Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X i załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Często chcielibyśmy wiedzieć, czy półgrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ jest jednostajnie ograniczona. Twierdzenie generacyjne Hillego-Yosidy daje na to konieczny i dostateczny warunek: istnieje $C \geq 0$, takie że

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{(\mathrm{Re}(\lambda))^n} \tag{4.31}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Mimo że rezolwenta jest bardziej przystępna niż sama półgrupa, (4.31) wymaga oszacowania dla wszystkich potęg rezolwenty, co jest niedogodnieniem w wielu zastosowaniach. Z drugiej strony, $(T(t))_{t\geq 0}$ jest ściągalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)} \tag{4.32}$$

dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Jest to oczywiście dużo wygodniejszy do sprawdzenia warunek niż (4.31).

Naturalnym wydaje się pytanie, co można powiedzieć o $(T(t))_{t\geq 0}$ mając następujący warunek pośredni między (4.31) a (4.32): istnieje $C \geq 0$, takie że

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\mathrm{Re}(\lambda)} \tag{4.33}$$

dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Warunek ten wprowadzono w [52] i jest on obecnie nazywany *warunkiem Kreissa*. Jeśli X jest przestrzenią Hilberta, to gwarantuje on, że $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ rośnie co najwyżej liniowo gdy $t \to \infty$, zaś dla ogólnej przestrzeni Banacha X $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ może rosnąć wykładniczo gdy $t \to \infty$ (porównaj [29]).

W różnych zastosowaniach spotykamy półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$, takie że $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ rośnie wielomianowo, gdy $t \to \infty$ i powyższy opis sugeruje pytanie o to, jak takie precyzyjne zachowanie wzrostowe jest związane z oszacowaniami na rezolwentę. Dokładniej rzecz ujmując, obierzmy niemalejące $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$, takie że

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq g\Big(\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\Big) \tag{4.34}$$

dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Spodziewamy się, że tempo wybuchu rezolwenty w (4.34) jest powiązane ze wzrostem stowarzyszonej półgrupy, jak jest to w przypadku warunku Kreissa (4.33) (przynajmniej na przestrzeniach Hilberta). W ogólności istotnie tak jest, co pokazaliśmy w (R2).

Mnożniki Fouriera. Aby powiązać (4.34) z tempami wzrostu stowarzyszonej półgrupy, stosujemy te same metody co w Rozdziałach 4.7 i 4.8. Najpierw łączymy doprecyzowane tempa wzrostu dla półgrupy i własności mnożników Fouriera (L^p, L^q) rezolwenty, tym razem wzdłuż prostych urojonych. Przypomnijmy z (4.9), że $\|m\|_{\mathcal{M}_{p,q}(X,Y)} = \|T_m\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R};X),L^q(\mathbb{R};Y))}$ jest normą mnożnika symbolu $m : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X,Y)$.

Twierdzenie 4.10. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ i niech $\alpha \geq 0$. Załóżmy, że istnieją niemalejące $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ i $p, q \in [1,\infty]$, takie że $[\xi \mapsto R(\omega + i\xi, A)] \in \mathcal{M}_{p,q}(D((-A)^\alpha), X)$ dla każdego $\omega \in (0,1]$ z*

$$\big\|[\xi \mapsto R(\omega + i\xi, A)]\big\|_{\mathcal{M}_{p,q}(D((1-A)^\alpha),X)} \leq g\big(\tfrac{1}{\omega}\big). \tag{4.35}$$

Wówczas istnieje $C \geq 0$, takie że

$$\|T(t)x\|_X \leq Cg(t)\|x\|_{D((1-A)^\alpha)} \tag{4.36}$$

dla wszystkich $x \in D((1-A)^\alpha)$ i $t \geq 1$.

Zauważmy, że skoro nie założyliśmy, że $0 \in \rho(A)$, musimy badać $(1-A)^\alpha$.

Stała C w (4.36) może być podana dokładnie. Implikacja odwrotna z (4.36) do (4.35) również zachodzi, ale jej sformułowanie jest nieco mniej przystępne. Odwołujemy czytelnika do Twierdzenia 3.11 w (R2) dla sformułowania odwrotnego w przypadku wielomianowego g, którego dowodu można użyć także dla ogólniejszego g. Jak wcześniej, polega on na nierówności Younga.

De facto udowodniliśmy już większość twierdzenia dowodząc Stwierdzenia 4.4, które to z kolei polegało na argumentach naszkicowanych w Rozdziale 4.3. Istotnie przy założeniach twierdzenia operator mnożnika Fouriera z symbolem $\xi \mapsto R(\omega + i\xi, A)$ jest ograniczony z $L^1(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha)) \cap L^p(\mathbb{R}; D((-A)^\alpha))$ do $L^\infty(\mathbb{R}; X)$ z normą operatora, którą możemy oszacować w zależności od $g(\frac{1}{\omega})$. Wówczas (4.13) daje

$$\|e^{-\omega t}T(t)x\|_X \lesssim g\big(\tfrac{1}{\omega}\big)\|x\|_{D((-A)^\alpha)}$$

dla x w odpowiedniej gęstej podprzestrzeni i wszystkich $t \geq 0$. Możemy teraz przyjąć $\omega := 1/t$, by otrzymać pożądany wniosek.

Konkretne wyniki. Mając do dyspozycji Twierdzenie 4.10, możemy zastosować te same metody co w poprzednich rozdziałach. Możemy użyć (4.34), by pokazać, że rezolwenta spełnia założenia odpowiednich twierdzeń o mnożnikach Fouriera (L^p, L^q), a wówczas wyniki te wraz z Twierdzeniem 4.10 implikują precyzyjne tempa wzrostu orbit półgrupy. Na przestrzeniach Hilberta procedura ta daje następujący wynik.

Twierdzenie 4.11. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Banacha X. Załóżmy, że $\lambda \in \rho(A)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ z $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ i niech $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ będzie niemalejące, takie że $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq g\big(\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\big)$ dla wszystkich takich λ. Wówczas istnieje $C \geq 0$, takie że*

$$\|T(t)x\|_X \leq Cg(t)\|x\|_X$$

dla wszystkich $x \in X$ i $t \geq 1$.

Zauważmy, że Twierdzenie 4.11 odzyskuje fakt, że warunek Kreissa (4.33) implikuje, że stowarzyszona półgrupa rośnie co najwyżej liniowo. Ponieważ wspomniany wzrost liniowy jest ostry z dokładnością do ewentualnej wielomianowej ε-straty (porównaj [29]), Twierdzenie 4.11 jest także zasadniczo ostre w ogólności. Twierdzenie 4.11 było w większości zawarte już w [43], aczkolwiek bez powiązania z mnożnikami Fouriera. Abstrakcyjne powiązanie do mnożników Fouriera (L^p, L^p) z wartościami operatorowymi uzyskano w [55], choć związek ten jest innej natury niż Twierdzenie 4.10.

Zaletą naszego podejścia, opierając się na Twierdzeniu 4.10 i twierdzeniach o mnożnikach Fouriera (L^p, L^q), jest fakt, iż pozwala ono otrzymać konkretne przedłużenia Twierdzenia 4.11 do ogólniejszych przestrzeni Banacha i półgrup. Przykładowo, używając wyników Rozdziału 4.6 i Lematu 4.5, otrzymujemy $\alpha \geq 0$, takie że

$$\|T(t)x\|_X \lesssim g(t)\|x\|_{D((1-A)^\alpha)}$$

dla wszystkich $x \in D((1-A)^\alpha)$ i $t \geq 1$, gdzie α zależy od geometrii X. W szczególności, choć na ogólnych przestrzeniach Banacha półgrupa $(T(t))_{t\geq 0}$ może rosnąć wykładniczo nawet gdy zachodzi warunek Kreissa (4.33), warunek ten implikuje, że orbity $t \mapsto T(t)x$ z $x \in D((1-A)^\alpha)$ rosną co najwyżej liniowo, jeśli $\alpha > 1$.

De facto możemy także użyć naszego podejścia, by pokazać, że wniosek Twierdzenia 4.9 zachodzi dla dodatnich półgrup na przestrzeniach L^p lub przestrzeniach funkcji ciągłych, jak również dla półgrup analitycznych (oraz ogólniej dla półgrup asymptotycznie analitycznych). Dowody tychże wyników opierają się na twierdzeniach o mnożnikach Fouriera (L^p, L^q), których nie przytoczyliśmy w Rozdziale 4.6. Twierdzeniem o mnożnikach Fouriera (L^p, L^p) dla dodatnich półgrup jest Stwierdzenie 3.7 w (R2), choć część tego sformułowania była już zawarta w Twierdzeniu 3.24 z (R4). Wynik dla asymptotycznie analitycznych półgrup opiera się o twierdzenie o mnożnikach (L^1, L^∞) , które można wywnioskować z [15].

4.10. **Cel (O5).** Jak dotąd wspólnym czynnikiem w tejże pracy było użycie twierdzeń o mnożnikach Fouriera (L^p, L^q), by wywnioskować wyniki dotyczące długofalowego zachowania półgrup, do których można wnieść informację o geometrii przestrzeni bazowych. W poprzednich rozdziałach nasuwa się jednak jeszcze jeden interesujący pomysł. Dokładniej rzecz ujmując, dzięki odkryciu związku między teorią asymptotyki równań ewolucyjnych a analizą harmoniczną w przestrzeniach Banacha, możemy rozdzielić strukturę pytania o asymptotykę półgrup. Doprowadziło to także do nowych wyników nt. półgrup na przestrzeniach Hilberta, gdzie powiązania z analizą harmoniczną i geometrią przestrzeni Banacha są mniej zawiłe. W tym rozdziale omówimy wyniki dotyczące przestrzeni Hilberta zawarte w (R1). W tym wypadku nie wskazujemy bezpośrednio związku z mnożnikami Fouriera (L^p, L^q) ani w wynikach, ani w dowodach. Niemniej postaramy się przedstawić, jak ten sam wzorzec co poprzednio leży u podstaw dowodu głównego wyniku.

Sformułowanie głównego wyniku. Rozważamy tu podobnie jak w Rozdziale 4.4 jednostajnie ograniczoną C_0-półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ z generatorem A na przestrzeni Hilberta X, takim że $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$. Jak dotąd żaden z naszych wyników a priori nie zakładał nic o wzroście na odpowiadających półgrupach i zależały one jedynie od informacji spektralnych o generatorze. Tutaj jednak założenie o jednostajnej ograniczoności będzie grało kluczową rolę. Niech

$$M(\lambda) = \sup_{|\xi|\leq\lambda} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \lambda \geq 0, \tag{4.37}$$

i załóżmy, że $M(\lambda) \to \infty$ gdy $\lambda \to \infty$ (jeśli tak nie jest, to z Twierdzenia 4.6 wynika, że $(T(t))_{t\geq 0}$ jest stabilna wykładniczo). Aby określić asymptotykę klasycznych rozwiązań stowarzyszonego abstrakcyjnego zagadnienia Cauchy'ego, tj. orbit $t \mapsto T(t)x$ z $x \in D(A)$, musimy uzyskać tempa zaniku dla $\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ gdy $t \to \infty$. Przy oznaczeniach jak w Rozdziale 4.4, na mocy [14] istnieją $c, C > 0$, takie że

$$\frac{c}{M^{-1}(Ct)} \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{M_{\log}^{-1}(ct)} \tag{4.38}$$

dla dostatecznie dużych t. Prawa strona (4.38) jest nieco większa niż lewa i celem tegoż rozdziału jest określenie, dla jakich M (4.38) może zostać poprawiona do

$$\frac{c}{M^{-1}(Ct)} \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{M^{-1}(ct)}. \tag{4.39}$$

To drugie oszacowanie pokazałoby z dokładnością do stałych, jakie dokładnie jest najlepsze asymptotyczne zachowanie, jakiego możemy oczekiwać dla ogólnego klasycznego rozwiązania. Borichev i Tomilov udowodnili, że (4.39) zachodzi, jeśli $M(\lambda) \eqsim \lambda^\beta$ dla pewnego $\beta \geq 0$ i wszystkich $\lambda \geq 1$. Z drugiej strony wiadomo, że (4.39) nie musi zachodzić, jeśli M rośnie zbyt wolno, np. gdy $M(\lambda) \eqsim \log(\lambda)$ dla $\lambda \geq 2$ (porównaj [13, Przykład 5.2]). Stąd naturalnym wydaje się rozważanie M, które nie różnią się wiele od wielomianu, jak to zostało zrobione w [13]. Odpowiadająca definicja brzmi następująco.

Definicja 4.12. Niech $a \geq 0$ i niech $N : [a, \infty) \to (0, \infty)$ będzie mierzalne. Dla $\alpha \in \mathbb{R}$, funkcja N jest *regularnie zmieniająca się (o indeksie α)*, jeśli

$$\lim_{s\to\infty} \frac{N(\lambda s)}{N(s)} = \lambda^\alpha$$

dla każdego $\lambda \geq 1$. Ponadto N ma *dodatni wzrost*, jeśli istnieją $\alpha > 0$, $c \in (0, 1]$ i dodatnie $s_0 \geq a$, takie że

$$\frac{N(\lambda s)}{N(s)} \geq c\lambda^\alpha$$

dla wszystkich $\lambda \geq 1$ i $s \geq s_0$.

Zauważmy, że funkcja o dodatnim wzroście zmierza do nieskończoności w tempie co najmniej wielomianowym. Co więcej, każda regularnie zmieniająca się funkcja o indeksie $\alpha > 0$ ma dodatni wzrost. Asymptotycznie regularnie zmieniające się funkcje nie odbiegają zbyt bardzo od wielomianów. Przykładowo każda funkcja postaci $N(\lambda) = \lambda^\alpha \log(\lambda)^\beta$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i wszystkich $\lambda \geq 2$ jest regularnie zmieniająca się. Funkcje tego drugiego typu były badane przez Batty'ego, Chilla i Tomilova w [13]. Pokazali oni, że przy oznaczeniach jak w (4.37) jeśli M spełnia warunek $M(\lambda) \eqsim \lambda^\alpha \log(\lambda)^\beta$ dla pewnych $\alpha > 0$ i $\beta \leq 0$, to zachodzi (4.39). Otrzymali także pewne częściowe wyniki dla $\beta > 0$. Udowodnili również, że jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą normalną, to (4.39) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy M ma dodatni wzrost. To sprowadza nas do głównego wyniku tego rozdziału - Twierdzenia 1.1 z (R1).

Twierdzenie 4.13. *Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie jednostajnie ograniczoną C_0-półgrupą z generatorem A na przestrzeni Hilberta X, takim że $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$. Niech $M(\lambda) = \sup_{|\xi|\leq\lambda} \|R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ dla $\lambda \geq 1$. Jeśli M ma dodatni wzrost, to istnieją $c, C > 0$, takie że*

$$\frac{c}{M^{-1}(t)} \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{M^{-1}(t)} \tag{4.40}$$

dla dostatecznie dużych t.

Zauważmy, że (4.40) różni się nieco od (4.39), gdyż w (4.40) nie ma żadnych stałych przy t. Fakt, iż $M^{-1}(ct) \eqsim M^{-1}(t)$ gdy $t \to \infty$ dla każdego $c > 0$, okazuje się charakteryzować klasę funkcji z dodatnim wzrostem - porównaj. Stwierdzenie 2.2 w (R1).

Ponieważ założenie o dodatnim wzroście jest konieczne także, aby zachodziło (4.40) jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą normalną (de facto jest ono konieczne dla nieco większej klasy półgrup), Twierdzenie 4.13 całkowicie rozwiązuje hipotezę Batty'ego i Duyckaertsa: klasa M, dla których (4.40) zachodzi dla dowolnej półgrupy jak w Twierdzeniu 4.13, pokrywa się z klasą funkcji o dodatnim wzroście.

W (R1) można znaleźć także poprawki do (4.38) dla klasy funkcji, które nie mają dodatniego wzrostu. Ponadto pokazujemy, że jeśli $(T(t))_{t\geq 0}$ jest półgrupą normalną, to dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\frac{1-\varepsilon}{M_{\max}^{-1}(t)} \leq \|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{M_{\max}^{-1}(t)}$$

dla dostatecznie dużych t, gdzie $M_{\max}(\lambda) := \max_{1\le s\le\lambda} M(\lambda/s)\log(s)$ dla $\lambda \ge 1$. Mimo to w pozostałej części skupimy się na dowodzie Twierdzenia 4.13, a czytelnika odsyłamy do (R1) po te dodatkowe wyniki.

Jednostajna ograniczoność. Aby zrozumieć, dlaczego Twierdzenia 4.13 nie można dowieść przy użyciu tych samych metod co w Rozdziałach 4.7, 4.8 i 4.9, pouczające jest ponowne przyjrzenie się Twierdzeniu 4.9. Wynik ten jest prawdziwy bez wstępnych założeń na wzrost półgrupy $(T(t))_{t\ge0}$ i dla każdego $s \ge 0$ mamy

$$\|T(t)(-A)^{-(s+1)\beta}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim t^{-s}, \quad t \ge 1. \tag{4.41}$$

Z drugiej strony, jeśli założymy dodatkowo, że $(T(t))_{t\ge0}$ jest jednostajnie ograniczona, to możemy połączyć (4.41) ze wspomnianą jednostajną ograniczonością, by otrzymać

$$\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim t^{-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{(s+1)\beta}}, \quad t \ge 1. \tag{4.42}$$

Drugie oszacowanie staje się lepsze, gdy $s \to \infty$, ale dla każdego $s > 0$ jest ono słabsze niż (4.38). Dokładniej rzecz ujmując, biorąc $s \to \infty$ w (4.42), otrzymujemy główny wynik z [12] i możemy wtedy polegać na słabszym wariancie (4.41), który jest prawdziwy także na ogólnych przestrzeniach Banacha. Z drugiej strony, w Przykładzie 4.20 w (R3) pokazano, że Twierdzenie 4.9 jest zasadniczo ostre. Oznacza to, że założenie, że $(T(t))_{t\ge0}$ jest jednostajnie ograniczona, musi grać kluczową rolę w Twierdzeniu 4.13 i nie może być brane pod uwagę jedynie poprzez interpolację z oszacowaniem, które zachodzi również dla nieograniczonych półgrup.

Zbadajmy teraz pobieżnie metodę dowodową, jakiej używaliśmy w poprzednich rozdziałach. Wówczas kluczowy związek z teorią mnożników Fouriera otrzymaliśmy poprzez zastosowanie mnożnika Fouriera zawierającego rezolwentę funkcji f z (4.12):

$$f(t) := \begin{cases} e^{-\widetilde{\omega}t}T(t)x & t \ge 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases} \tag{4.43}$$

gdzie $\widetilde{\omega}$ jest dostatecznie duże, ażeby $(e^{-\widetilde{\omega}t}T(t))_{t\ge0}$ była wykładniczo stabilna, a $x \in X$. Ponieważ takie $\widetilde{\omega}$ istnieje dla dowolnej C_0-półgrupy $(T(t))_{t\ge0}$, byliśmy w stanie wywnioskować sformułowania, które zależały jedynie od własności spektralnych generatora. Z drugiej strony, nieodzowną wadą tejże metody jest to, że nie bierze ona pod uwagę dodatkowych informacji o wzroście półgrupy, takich jak jej jednostajna ograniczoność.

Mnożniki Fouriera. Skądinąd kluczowe narzędzie do dowodu Twierdzenia 4.13 jest zawarte w [13, Twierdzenie 4.7]. Autorzy zamiast (4.12) używają tam funkcji $f_\tau : \mathbb{R} \to X$ dla każdego $\tau > 0$, którą definiują w następujący sposób:

$$f_\tau(t) := \begin{cases} T(t)x & 0 \le t \le \tau, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{4.44}$$

Odwzorowanie $B : D(A) \to X$ jest tutaj przemienne z $(T(t))_{t\ge0}$ i ma własność

$$C_B := \sup_{\mathrm{Re}(\lambda)>0} \|BR(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty. \tag{4.45}$$

Zauważmy, że f_τ jest jednostajnie ograniczona jedynie dla $\tau > 0$ z racji założenia o jednostajnej ograniczoności $(T(t))_{t\ge0}$. Stąd, założenie o jednostajnej ograniczoności jest już zawarte w f_τ, choć nie w sposób bezpośredni, a nie było tak w przypadku (4.43). Następnie niech $a > 0$ i przyjmijmy $f_{\tau,a}(t) := e^{-at}f_\tau(t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. Ustalmy ponadto

$$m_a(\xi) := R(a + i\xi, A)B, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{4.46}$$

i zauważmy, że

$$T_{m_a}(f_{\tau,a})(t) = \int_0^\tau e^{-at}T(t)Be^{a(\tau-t)}f_\tau(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} tBT(t)x & 0 \le t \le \tau, \\ \tau BT(t)x & t > \tau, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

na mocy (4.2).

Na mocy (4.45) i twierdzenia Plancherela mamy

$$\int_0^\tau e^{-2at}\|tBT(t)x\|^2\mathrm{d}t \le \|T_{m_a}(f_{\tau,a})\|^2_{L^2(\mathbb{R};X)} \le C_B^2\|f_{\tau,a}\|_{L^2(\mathbb{R};X)} = C_B^2\int_0^\tau e^{-2at}\|T(t)x\|^2\mathrm{d}t,$$

przy czym od teraz piszemy po prostu $\|\cdot\|$ dla oznaczenia $\|\cdot\|_X$. Dalej niech $a \to 0$ i używamy $K := \sup_{t\ge 0}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, by otrzymać

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau t^2\|BT(t)x\|^2\mathrm{d}t \le C_B^2K^2\|x\|^2.$$

W tym momencie możemy użyć własności półgrupy i nierówności Cauchy'ego-Schwarza dla $y \in X$:

$$\begin{aligned} |\langle \tau T(\tau)Bx, y\rangle| &= \Big|\langle \frac{2}{\tau}\int_0^\tau tT(\tau-t)T(t)Bx\,\mathrm{d}t, y\rangle\Big| = \Big|\frac{2}{\tau}\int_0^\tau t\langle T(t)Bx, T^*(\tau-t)y\rangle\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\le \Big(\frac{2}{\tau}\int_0^\tau t^2\|T(t)Bx\|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\Big(\frac{2}{\tau}\int_0^\tau \|T^*(\tau-t)y\|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \\ &\le \sqrt{2}K\|y\|\Big(\frac{2}{\tau}\int_0^\tau t^2\|T(t)Bx\|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \le 2C_BK^2\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Zatem $\|T(\tau)x\| \le 2C_BK^2\|x\|/\tau$. Następnie jeśli $M(\lambda) \eqsim \lambda^\beta$ dla $\lambda \ge 1$, to Stwierdzenie 4.8 pokazuje, że (4.45) zachodzi z $B = A^{-\beta}$ i otrzymujemy $\|T(t)A^{-\beta}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim \tau^{-1}$. Dalej interpolacja z jednostajną ograniczonością $(T(t))_{t\ge 0}$ lub odpowiednia ekstrapolacja odzyskują główny wynik z [20]: $\|T(\tau)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \lesssim \tau^{-1/\beta}$ gdy $t \to \infty$.

Przedstawiony dowód głównego wyniku z [20], który jest dość różny od oryginalnego dowodu w [20], jest bardzo silny z trzech powodów. Po pierwsze, choć nie zostało to bezpośrednio wspomniane w [13], łączy on Twierdzenie 4.13 z teorią mnożników Fouriera. Pozwala to dołączyć geometrię X poprzez twierdzenie Plancherela. Przypomnijmy, że jest to istotne, gdyż wiadomo, że (4.38) jest ostra na ogólnych przestrzeniach Banacha. Po drugie, używa on jednostajnej ograniczoności półgrupy w jasny sposób, zarówno zakodowanej w funkcji f_τ z (4.44), jak i przy zastosowaniu nierówności Cauchy'ego-Schwarza. Jest to istotne, gdyż (4.39) nie zachodzi dla ogólnych nieograniczonych półgrup. Po trzecie, używa on bezpośrednio własności półgrupy. To także jest istotne, gdyż wariant (4.38) zachodzi dla ogólniejszych funkcji o wartościach w X i wiadomo, że analog (4.40) dla takich funkcji psuje się nawet na przestrzeniach Hilberta.

Jednakże jest jedna ważna wada wspomnianego dowodu: musimy znaleźć B, które spełnia (4.45). Istotnie nie możemy bezpośrednio zastosować twierdzenia Plancherela do rezolwenty, gdyż jest ona z założenia nieograniczona. W przypadku wielomianowego M możemy polegać na Stwierdzeniu 4.8 i użyć interpolacji, by uzyskać (4.40), ale dla ogólniejszych M nie jest jasne, jak należy postępować. Dokładniej rzecz ujmując, w [13] autorzy wykształcili zaawansowane narzędzia rachunku funkcyjnego, by zaradzić temu problemowi dla konkretnego M. Nie wiadomo jednak, czy takie podejście może zadziałać dla ogólnego M o dodatnim wzroście.

Teoria tauberowska. Dla kontrastu, Batty i Duyckaerts otrzymali (4.38) bez żadnych założeń na M. Stąd naturalnym wydaje się badanie ich dowodu w celu określenia, jak poradzili oni sobie z problematyczną nieograniczonością rezolwenty. Mówiąc ściślej, opiszemy modyfikację ich podejścia autorstwa Chilla i Seiferta (porównaj [23]). Podczas gdy Batty i Duyckaerts opierali się w [14] na całkach brzegowych, w [23] podejście tauberowskie zastosowano w środowisku znacznie bliższemu technikom analizy fourierowskiej.

Gdy zastosujemy go do orbity półgrupy

$$t \mapsto g(t) := \begin{cases} T(t)A^{-1}x & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

dla $x \in X$, dowód [23, Twierdzenie 2.1] używa rozkładu $g = \varphi_R * g + (1 - \varphi_R) * g$ dla $R > 0$. Element $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ jest tutaj taki, że $0 \leq \widehat{\varphi} \leq 1$, $\widehat{\varphi}(\xi) = 1$ dla $|\xi| \leq 1/2$ oraz $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$ dla $|\xi| \geq 1$. Ponadto $\widehat{\varphi_R}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/R)$ obcina się do obszaru $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \leq R\}$. Zauważmy, że

$$g(t) = T_{\widehat{\varphi_R}}(g)(t) + (1 - \varphi_R) * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \widehat{\varphi_R}(\xi) R(i\xi, A) A^{-1} x \, \mathrm{d}\xi + (1 - \varphi_R) * g(t) \tag{4.47}$$

dla $t \in \mathbb{R}$, co wynika z (4.2). Nie będziemy wchodzić w szczegóły, ale sprytny argument całkowania przez części pokazuje, że $|(1 - \varphi_R) * g(t)| \lesssim 1/R$ dla wszystkich $t \geq 1$. Dla drugiego składnika prawej strony również całkujemy sukcesywnie przez części i używamy oszacowań postaci

$$\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{\varphi_R}(\xi) R(i\xi, A)^{k+1}\|_{\mathcal{L}(X)} \mathrm{d}\xi \lesssim M(R)^{k+1}, \tag{4.48}$$

by uzyskać wyrażenie

$$\|g(t)\| \lesssim \frac{1}{R}\big((1 + R)^2 M(R)^2 e^{-2ct/M(R)} + 1\big)$$

dla odpowiednich $c > 0$. Wówczas dla dostatecznie dużych t wybór $R = M_{\log}^{-1}(ct)$ daje prawą stronę (4.38).

Zbadajmy po krótce niektóre aspekty tegoż dowodu. Po pierwsze, składnik $(1 - \varphi_R) * g$ odpowiada ogonowi rezolwenty o wysokiej częstotliwości, który zawiera $R(i\xi, A)$ dla $|\xi| \geq R$. Składnik ten był problematyczny w powyższym argumencie, gdyż nie jest on bezpośrednio dostępny przy użyciu twierdzenia Plancherela. Dowód radzi sobie z tymże składnikiem w sprytny sposób.

Z drugiej strony, przedostatni składnik w (4.47) zawiera niskie częstotliwości $\xi \mapsto R(i\xi, A)$. Ponieważ z założenia $\|\widehat{\varphi_R}(\xi) R(i\xi, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(R)$, możemy zastosować twierdzenie Plancherela do tegoż składnika. W szczególności z dokładnością do przesunięcia o a i operatora B, jest to fragment o niskiej częstotliwości tego samego symbolu co w (4.46), który odgrywał kluczową rolę w powyższym dowodzie. Niestety składnik $T_{\widehat{\varphi_R}}(g)$ jest mnożnikiem Fouriera zaaplikowanym do orbity półgrupy zamiast mnożnikiem Fouriera zawierającym rezolwentę zaaplikowanym do użytecznej funkcji. Zatem nie jest jasne, jak należy zastosować twierdzenie Plancherela. Zamiast tego używamy oszacowań wartości bezwzględnej podobnie jak w (4.48).

Połączenie składników. Choć oszacowanie z wartością bezwzględną w (4.48) może wydawać się słabe, sprowadza nas ono z powrotem do teorii mnożników (L^p, L^q), która leży u podstaw naszych wyników. Istotnie zauważmy, że dla dowolnych $m \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X))$ i $f \in L^1(\mathbb{R}^n; X)$ mamy

$$\|T_m(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R};X)} \leq \big\|m\widehat{f}\big\|_{L^1(\mathbb{R};X)} \leq \|m\|_{L^1(\mathbb{R};\mathcal{L}(X))} \big\|\widehat{f}\big\|_{L^\infty(\mathbb{R};X)} \leq \|m\|_{L^1(\mathbb{R};\mathcal{L}(X))} \|f\|_{L^1(\mathbb{R};X)}.$$

Zatem każde $m \in L^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(X))$ jest mnożnikiem Fouriera $(L^1(\mathbb{R}; X), L^\infty(\mathbb{R}; X))$. Dalej zauważmy, że z dokładnością do czynnika k, przesunięcia o a i operatora B, (4.48) jest de facto oszacowaniem mnożnika (L^1, L^∞) dla fragmentu o niskiej częstotliwości symbolu (4.46) mnożnika, który odgrywał kluczową rolę w dowodzie [13, Twierdzenie 4.7]. Aby uzyskać ostateczny związek z resztą pracy, zauważmy ze Stwierdzenia 4.1 i Twierdzenia 4.2 (porównaj także z uwagą przed Stwierdzeniem 4.8), że zwykle możemy jedynie oczekiwać oszacowań na mnożniki Fouriera (L^1, L^∞) na ogólnych przestrzeniach Banacha. Ponieważ (4.38) zachodzi dla ogólnych przestrzeni Banacha, możemy istotnie spodziewać się oszacowań na mnożniki (L^1, L^∞), podobnie jak w (4.48).

Sprowadza nas to do następującej luźno sformułowanej strategii udowodnienia Twierdzenia 4.13. Gdybyśmy umieli zamienić przedostatni składnik w (4.48) na wyrażenie postaci

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \widehat{\varphi_R}(\xi) R(i\xi, A) \widehat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \tag{4.49}$$

dla odpowiedniego f, moglibyśmy polegać na konkretnych oszacowaniach na składnik o wysokiej częstotliwości, które nie zawierają w sobie analizy harmonicznej. Pomijając fragment o niskiej częstotliwości, otrzymujemy wyrażenie jak w (4.49) w naszym opisie dowodu [13, Twierdzenie 4.1]. Na przestrzeniach Hilberta możemy wówczas zastosować twierdzenie Plancherela do (4.49), zaś na przestrzeniach Banacha możemy spodziewać się napotkać oszacowania mnożników (L^1, L^∞) jak w (4.48).

Bazowo jest to być może główna idea dowodu Twierdzenia 4.13. Oba dowody nakreślone powyżej zawierają sprytne pomysły poradzenia sobie z różnymi aspektami tego samego problemu, a w Twierdzeniu 3.2 z (R1) składniki te łączymy w jeden dowód. Sprecyzowanie tegoż powiązania jest nietrywialne, po części dlatego, że musimy zachować moc obu podejść jednocześnie. Odsyłamy do (R1) po szczegóły, choć warto zauważyć, że założenie dodatniego wzrostu na M użyte zostało do poradzenia sobie z niskimi częstotliwościami symbolu mnożnika. Jednakże choć techniczne szczegóły mogą potencjalnie zaciemnić bazową strukturę, jedna z głównych idei prowadzących do dowodu Twierdzenia 4.13 zawiera to samo podejście z mnożnikami (L^p, L^q), które było wspólnym czynnikiem naszej pracy.

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

Artykuły naukowe, które nie zostały zawarte w pracy doktorskiej:

(R6) *Off-singularity bounds and Hardy spaces for Fourier integral operators.* Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), no. 8, 5773-5832. With A. Hassell and P. Portal.

(R7) *Functional calculus for C_0-groups using type and cotype.* Q. J. Math. 70 (2019), no. 1, 17-47.

(R8) *Disintegration of positive isometric group representations on L^p-spaces.* Positivity 21 (2017), no. 2, 673-710. With M. de Jeu.

Artykuły naukowe, które zostały zawarte w pracy doktorskiej:

(R9) *Operator Lipschitz functions on Banach spaces.* Studia Math. 232 (2016), no. 1, 57-92. With F. Sukochev and A. Tomskova.

(R10) *Functional calculus on real interpolation spaces for generators of C_0-groups.* Math. Nachr. 289 (2016), no. 2-3, 275-289. With M. Haase.

(R11) *Functional calculus for semigroup generators via transference.* J. Funct. Anal. 265 (2013), no. 12, 3345-3368. With M. Haase.

(R12) *Convergence of subdiagonal Padé approximations of C_0-semigroups.* J. Evol. Equ. 13 (2013), no. 4, 875-895. With M. Egert.

Poniżej opisujemy wspomniane osiągnięcia. Artykuły, które nie były zawarte w pracy doktorskiej opiszemy nieco dokładniej. Po bardziej szczegółowy opis idei u podstaw artykułów od (R9) do (R12) odsyłamy do wstępu w [68].

5.1. Ograniczenia z dala od osobliwości i przestrzenie Hardy'ego dla operatorów całkowych Fouriera.

Wiemy, że L^p teoria równań falowych jest wysoce nietrywialna. Fakt ten należy skonstrastować z L^p teorią równań eliptycznych i parabolicznych, gdzie nawet trudne przypadki tychże równań są dobrze zbadane. L^p teoria równań eliptycznych zawiera w sobie operatory pseudoróżniczkowe i Caldrona-Zygmunda (porównaj [75]), podczas gdy niegładkie równania paraboliczne prowadzą nas do półgrup $(e^{tL})_{t\geq 0}$ dla operatora L w postaci dywergencji z niegładkimi współczynnikami (porównaj np. [7]). Operatory Calderona-Zygmunda są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$, jeśli są ograniczone dla jednego p, a operatory postaci e^{tL} są ograniczone dla p w otwartym przedziale wokół 2, jeśli L ma współczynniki w L^∞. Dla porównania nawet operatory rozwiązań $\cos(t\sqrt{-\Delta})$ i $\sin(t\sqrt{-\Delta})$ klasycznego równania falowego $\partial_t^2 u = \Delta u$ nie są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^n)$, chyba że $n = 1$, $t = 0$ lub $p = 2$. Podobne zjawisko zachodzi dla innych równań hiperbolicznych, ale teoria dla równań falowych jest wyjątkowa nawet wśród ogólniejszych równań hiperbolicznych. Istotnie, porównaj [60], dla wszystkich $\alpha > 0$ mamy

$$e^{it(-\Delta)^\alpha} : W^{2\alpha n|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

dla $p \in (1, \infty)$ i $t \in \mathbb{R}$, przy czym wykładnik ten jest ostry dla $t \neq 0$, chyba że $\alpha = 1/2$. W tym drugim przypadku Peral [64] i Miyachi [59] pokazali, że

$$e^{it\sqrt{-\Delta}} : W^{2s(p),p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \tag{5.1}$$

dla $1 < p < \infty$, gdzie

$$s(p) := \tfrac{n-1}{2}\left|\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p}\right| \tag{5.2}$$

i tej „straty $2s(p)$ pochodnych" nie można poprawić. Taka sama strata pochodnych na $L^p(\mathbb{R}^n)$ zachodzi dla odpowiednich *operatorów całkowych Fouriera*, klasy oscylacyjnych operatorów całkowych, zawierającej operatory rozwiązań równań falowych z gładkimi współczynnikami. Pokazali to Seeger, Sogge i Stein w [73] i dzięki ich wynikom L^p teoria równań falowych z gładkimi współczynnikami jest dobrze zbadana.

Z drugiej strony, choć operatory pseudoróżniczkowe są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $1 < p < \infty$, są one zazwyczaj nieograniczone na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wydaje się to sugerować, ze L^p teoria równań eliptycznych nie może zostać przedłużona do $p = 1$. Jednakże okazuje się, że istnieje podprzestrzestrzeń $L^1(\mathbb{R}^n)$, na której operatory pseudoróżniczkowe są ograniczone - klasyczna lokalna przestrzeń Hardy'ego $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Co więcej, poprzez interpolację możemy użyć tejże przestrzeni, by odzyskać ograniczoność operatorów pseudoróżniczkowych na $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 < p < \infty$. Podobnie dla równań parabolicznych istnieje teoria tzw. dopasowanych przestrzeni Hardy'ego [44] oraz naturalne przestrzenie niezmiennicze dla równań Schrödingera nazywane *przestrzeniami modulacji* (porównaj [26]). Możemy zatem oczekiwać, że istnieje analog (5.1) dla $p = 1$, zawierający przestrzeń niezmienniczą operatorów rozwiązań równań falowych, który pozwala odzyskać (5.1) dla $1 < p < \infty$. Istotnie taka przestrzeń została skonstruowana przez Smitha [74]. W (R6) przedłużyliśmy konstrukcję Smitha dla $p = 1$ do pełnej skali przestrzeni Hardy'ego $(\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n))_{1\le p\le\infty}$. Przestrzenie te są niezmiennicze ze względu na operatory całkowe Fouriera rzędu zero stowarzyszone z grafem kanonicznym i spełniają one zanurzenia Soboleva

$$W^{s(p),p}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{-s(p),p}(\mathbb{R}^n) \tag{5.3}$$

dla $1 < p < \infty$, gdzie $s(p)$ jest jak w (5.2) z oczywistymi modyfikacjami dla $p = 1$ i $p = \infty$ przy użyciu odpowiednio $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ i $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$. Zatem stosując operator całkowy Fouriera do $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ i używając gładkiej wersji zanurzeń Soboleva w (5.3), odzyskujemy (5.1) i główny wynik z [73].

Jednakże poza samym uzyskaniem istniejących już wyników, przestrzenie Hardy'ego dla operatorów całkowych Fouriera pozwalają też na nowe ważne zastosowania. Przykładowo możemy użyć ich, by rozwiązać równania falowe z niegładkimi współczynnikami, używając gładkich oszacowań takiego równania i poprawiając iteracyjnie w celu otrzymania dokładnego rozwiązania. Łącząc to z (5.3), uzyskujemy wówczas optymalną stratę $2s(p)$ pochodnych dla operatorów rozwiązań niegładkich równań falowych. Z drugiej strony jeśli spróbowalibyśmy zastosować twierdzenie Seegera, Soggego i Steina bezpośrednio, to każdy krok iteracji prowadziłby do ustalonej straty regularności i argument iteracyjny by się popsuł. W istocie przestrzenie Hardy'ego dla operatorów całkowych Fouriera zostały niedawno użyte w preprincie [41] przez Hassela i autora do udowodnienia, że równania falowe z odpowiednimi niegładkimi współczynnikami mają taką samą L^p regularność co równania falowe z gładkimi współczynnikami.

Dla $1 \le p < \infty$ przestrzeń Hardy'ego $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ składa się z tych $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dla których

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)} := \|q(D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \Big(\int_{S^*\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^1 \fint_{B_{\sqrt{\sigma}}(x,\omega)} |\psi_{\nu,\sigma}(D)f(y)|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}\nu \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}\Big)^{p/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}\omega\Big)^{1/p} < \infty,$$

przy czym $q \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest obcięciem o niskiej częstotliwości, $S^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ jest wiązką kosfer $\mathbb{R}^n$, a $B_{\sqrt{\sigma}}(x,\omega)$ jest kulą wokół (x,ω) o promieniu $\sqrt{\sigma}$ w odniesieniu do metryki anizotropowej d na $S^*\mathbb{R}^n$, która powstaje z z geometrii kontaktowej. Ponadto $\psi_{\nu,\sigma}$ są *paczkami falowymi*, które lokalizują się do obszarów postaci $\{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid |\xi| \approx \sigma^{-1}, |\hat{\xi} - \nu| \lesssim \sqrt{\sigma}\}$, gdzie $\hat{\xi} := \xi/|\xi|$ dla $\xi \neq 0$. Otrzymany w ten sposób rozkład częstotliwości f nazywamy diadyczno-parabolicznym bądź lub drugim diadycznym, które to pojęcie wprowadził Fefferman [32] i które odegrało kluczową rolę w [73]. Zwracamy również

uwagę, że definicja normy $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ zawiera w sobie kwadratową funkcję stożkową, a funkcje tego typu z kolei najłatwiej zrozumieć używając teorii *przestrzeni namiotowych*. Przestrzenie te wprowadzili Coifman, Meyer i Stein w [24] i od tego czasu okazały się one bardzo użyteczne w analizie niegładkich równań eliptycznych i parabolicznych.

W (R6) badaliśmy przestrzenie Hardy'ego dla operatorów całkowych Fouriera poprzez powiązanie przestrzeni namiotowych z *transformatami paczek falowych*. Transformaty te podnoszą funkcje na $\mathbb{R}^n$ do przestrzeni fazowej $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (porównaj [27,33] i [58, Rozdział 3]). Co więcej, $(S^*\mathbb{R}^n, d)$ jest przestrzenią miary z metryką podwajającą, przy czym wiadomo, że teoria przestrzeni namiotowych przedłuża się do przestrzeni miary z metryką podwajającą (porównaj [3]). Otrzymana przestrzeń namiotowa $T^p(S^*\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią funkcyjną na przestrzeni fazowej, a norma $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ funkcji $f \in \mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ jest równoważna $\|Wf\|_{T^p(S^*\mathbb{R}^n)}$ dla odpowiedniej transformaty paczek falowych W, która jest izometrią z $L^2(\mathbb{R}^n)$ do $L^2(T^*\mathbb{R}^n)$. Oznacza to, że operator T jest ograniczony na $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy podniesiony operator W^*TW jest ograniczony na $T^p(S^*\mathbb{R}^n)$, więc możemy użyć narzędzi analizy przestrzeni fazowych w celu badania ograniczoności operatorów na $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$.

Aby zrozumieć, dlaczego narzędzia przestrzeni fazowych są ważne, rozważmy ponownie teorię (niegładkich) operatorów eliptycznych i parabolicznych. Silnym pojęciem tejże teorii są *ograniczenia poza przekątną* operatora całkowego na przestrzeniach namiotowych (porównaj np. [9]). Ograniczenia te określają liczbowo fakt, iż osobliwości jądra takiego operatora zlokalizowane są blisko przekątnej. Kluczową różnicą między równaniami eliptycznymi i parabolicznymi a równaniami hiperbolicznymi jest to, że te drugie cechują się *propagacją osobliwości*. Zjawisko to skutkuje tym, że operatory rozwiązań równania przemieszczają osobliwości danych początkowych. To pociąga za sobą operatory całkowe z jądrami, których osobliwości nie znajdują się blisko przekątnej. Co więcej, propagacja osobliwości jest z natury zjawyskiem na przestrzeni fazowej, a tym samym można je badać jedynie poprzez jądra operatorów całkowych na przestrzeni fazowej. Na szczęście, jak wskazaliśmy wyżej, ograniczoność operatorów całkowych Fouriera na $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ jest równoważna ograniczoności odpowiednich operatorów całkowych na przestrzeniach funkcyjnych nad przestrzenią fazową, a dla operatorów tego drugiego rodzaju możemy uogólnić pojęcie ograniczeń poza przekątną do *ograniczeń poza osobliwościami*, jak to zrobiliśmy w (R6). Ponadto, podobnie jak w przypadku ograniczeń poza przekątną w teorii eliptycznej i parabolicznej, możemy następnie użyć wspomnianych ograniczeń poza osobliwościami do badania równań falowych z niegładkimi współczynnikami. Możemy z nich skorzystać także do wydedukowania pewnych własności $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$, jak choćby jej niezmienniczość ze względu na odpowiednie operatory całkowe Fouriera rzędu zero, lub fakt, że $\mathcal{H}^1_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ ma odpowiedni rozkład atomowy i cząsteczkowy .

Ostatecznie autor pokazał w [69], że norma $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ funkcji $f \in \mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ jest równoważna

$$\|q(D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \Big(\int_{S^{n-1}} \|\varphi_\omega(D)f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}\omega\Big)^{1/p}$$

dla $1 < p < \infty$, przy czym $q \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ i każde $\varphi_\omega(D)$ lokalizuje się ze względu na częstotliwość do paraboloidy w kierunku $\omega \in S^{n-1}$. Takie samo twierdzenie zachodzi dla $p = 1$ po zastąpieniu $\|\varphi_\omega(D)f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ przez $\|\varphi_\omega(D)f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ dla klasycznej przestrzeni Hardy'ego $H^1(\mathbb{R}^n)$, co autor pokazał wspólnie z Fan, Liu i Song w [31]. Te równoważne charakteryzacje $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ pozwalają dołączyć teorię Littlewooda–Paleya, jak to zostało dokonane przez autora w [71], aby udowodnić ograniczoność odpowiednich niegładkich operatorów pseudoróżniczkowych na $\mathcal{H}^p_{FIO}(\mathbb{R}^n)$. Tego typu własności ograniczoności, będące interesujące same w sobie, odegrały kluczową rolę w dowodzie optymalnej L^p regularności równań falowych z niegładkimi współczynnikami w [41].

5.2. **Rachunek funkcyjny dla C_0-grup przy użyciu typu i kotypu.** Wyniki zawarte w (R4) i (R5) o mnożnikach Fouriera (L^p, L^q) mają również zastosowania do teorii rachunku funkcyjnego. Teoria ta zajmuje się odwzorowaniami $f \mapsto f(A)$ dla odpowiednich funkcji f na $\mathbb{C}$ i operatorów A na przestrzeni Banacha X. Zazwyczaj chcemy powiązać własności funkcji f z własnościami operatora $f(A)$. Przykładowo załóżmy, że $-iA$ generuje C_0-grupę $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ na przestrzeni Banacha X i niech $M, \omega' \geq 0$ będą takie, że $\|U(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega'|s|}$ dla każdego $s \in \mathbb{R}$. Dla $\omega > \omega'$ niech $\mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ będzie przestrzenią

ograniczonych funkcji holomorficznych na pasie zespolonym

$$\mathrm{St}_\omega := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im}(z)| > \omega\}\,, \tag{5.4}$$

i niech $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$. Wówczas możemy zdefiniować $f(A)$ w naturalny sposób jako nieograniczony operator na X (porównaj [36]), przy czym chcielibyśmy wiedzieć, kiedy $f(A)$ jest de facto ograniczony. Jeśli jest tak dla wszystkich $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$, to mówimy, że A ma *ograniczony rachunek funkcyjny* $\mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$. Własność ta ma zastosowania do maksymalnej regularności (porównaj [5,50,53]) i odegrała kluczową rolę w rozwikłaniu hipotezy Kato o pierwiastkach kwadratowych w [8].

Skuteczna technika w teorii rachunku funkcjonalnego obejmuje tzw. *zasady przenoszenia* (porównaj [16,25,38]). U podstaw zasady przenoszenia leży diagram przemienny postaci

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{S_f} & F_2 \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ Y & \xrightarrow{f(A)} & Z \end{array} \tag{5.5}$$

gdzie Y i Z są podprzestrzeniami X, F_1 i F_2 są przestrzeniami funkcji o wartościach w odpowiednich przestrzeniach Banacha, a ι i P są ograniczone. Wówczas ograniczoność $f(A)$ z Y do Z wynika z ograniczoności operatora S_f. W [37,38] i (R11) zasady przenoszenia tego typu zostały użyte dla przypadku $Y = Z = X$ i $F_1 = F_2 = L^p(\mathbb{R}; X)$ dla $1 < p < \infty$, podczas gdy (R10) skupiał się na rzeczywistych przestrzeniach interpolacji $Y = Z = (D(A), X)_{\theta,q}$ i $F_1 = F_2 = B^\theta_{p,q}(\mathbb{R}; X)$ dla $\theta \in [0, 1]$, $q \in [1, \infty]$ i $p \in [1, \infty)$. Wówczas dla $S_f = T_{m_f}$, tj. mnożnika Fouriera z symbolem m_f, który jest powiązany z f, możemy zredukować problemy teorii rachunku funkcyjnego do pytań dotyczących analizy harmonicznej na przestrzeniach Banacha. W szczególności możemy używać twierdzenia Plancherela, jeśli X jest przestrzenią Hilberta i wariantów twierdzenia Mikhlina, jeśli $1 < p < \infty$ i X jest przestrzenią UMD, lub gdy pracujemy na przestrzeniach Besova.

Gdy łączymy zasady przenoszenia z twierdzeniem Mikhlina dla generatorów grupy $-iA$ jak wyżej, musimy ograniczyć się do następującej algebry funkcji:

$$\mathcal{H}^\infty_1(\mathrm{St}_\omega) := \{f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega) \mid \sup_{z\in\mathrm{St}_\omega} (1 + |z|)|f'(z)| < \infty\}, \tag{5.6}$$

wyposażonej w normę

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\infty_1(\mathrm{St}_\omega)} := \sup_{z\in\mathrm{St}_\omega} |f(z)| + (1 + |z|)|f'(z)| < \infty.$$

Ponadto dla $f \in \mathcal{H}^\infty_1(\mathrm{St}_\omega)$ otrzymane ograniczenie na normę operatora $f(A)$ zawiera $\|f\|_{\mathcal{H}^\infty_1(\mathrm{St}_\omega)}$. Jednakże w różnych zastosowaniach (porównaj np. schematy aproksymacji numerycznych w (R12) i poniżej) wymagamy ograniczeń na normę $f(A)$ w terminach normy supremalnej f dla licznej klasy $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$. Nie jest jasne, czy teoria mnożników (L^p, L^p) pozwala na takie zastosowania, gdy X nie jest przestrzenią Hilberta. Warto zauważyć, że możemy połączyć twierdzenie Mikhlina z zasadami przenoszenia, by udowodnić, że $-iA$ ma ograniczony rachunek $\mathcal{H}^\infty(V_{\varphi,\omega})$ na przestrzeniach UMD, gdzie $V_{\varphi,\theta} = \mathrm{St}_\omega \cup \Sigma_\varphi$ dla $\varphi \in (0, \pi/2)$ jest sumą mnogościową St_ω z podwójnym sektorem Σ_φ (porównaj [37]). Jednakże taki ograniczony rachunek jest znowu niewystarczający dla wielu zastosowań.

Założenia twierdzeń o mnożnikach Fouriera w Rozdziale 4.6, w szczególności Twierdzenia 4.3, wspominają jedynie o ograniczeniach supremalnych na symbol mnożnika. Okazuje się, że używając zanurzenia $B^0_{q,1}(\mathbb{R}; X) \subseteq L^q(\mathbb{R}; X)$, z Twierdzenia 4.3 i zasady kontrakcji Kahanego otrzymujemy

$$T_m : B^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}_{p,1}(\mathbb{R}; X) \to L^q(\mathbb{R}; X), \tag{5.7}$$

jeśli $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ i X ma typ $p \in [1, 2]$ i kotyp $q \in [2, \infty]$.

Z drugiej strony w (R10), bazując na [37], pokazaliśmy, że jeśli $q < \infty$, to dla każdego $x \in (D(A), X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},p}$ odpowiednio ważony wariant orbity grupy $s \mapsto U(-s)x$ jest zawarty w $B^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}_{p,1}(\mathbb{R}; X)$. Daje to ograniczony operator $\iota : (D(A), X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1} \to B^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}_{p,1}(\mathbb{R}; X)$. Co więcej, istnieje ograniczony

rzut $P : L^q(\mathbb{R}; X) \to X$, taki że (5.5) zachodzi dla każdego $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ z $F_1 = B^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}_{p,1}(\mathbb{R}; X)$, $F_2 := L^q(\mathbb{R}; X)$ i $S_f = T_{m_f}$ dla symbolu $m_f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ z $\|m_f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{\mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)}$.

Łącząc (5.7) z tym konkretnym przypadkiem (5.5), otrzymujemy następujące twierdzenie, będące głównym wynikiem (R7).

Twierdzenie 5.1. *Niech $-iA$ generuje C_0-grupę na przestrzeni Banacha X z typem $p \in [1, 2]$ i kotypem $[2, \infty)$ oraz niech $M, \omega' \geq 0$ będą takie, że $\|U(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega'|s|}$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$. Wówczas dla każdego $\omega > \omega'$ istnieje $C \geq 0$, takie że $(D(A), X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1} \subseteq D(f(A))$ i*

$$\|f(A)x\|_X \leq C\|x\|_{(D(A),X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1}}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ i $x \in (D(A), X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1}$.

Zwróćmy uwagę, że użyte techniki nie ograniczają się do rzeczywistych przestrzeni interpolacji - mogą być one również wykorzystane do dziedzin ułamkowych potęg generatorów grupy. Dokładniej rzecz ujmując, jeśli założymy dodatkowo, że X jest izomorficzna z dopełnialną podprzestrzenią p-wypukłej i q-wklęsłej kraty Banacha[2] z $p \in [1, 2]$ i $q \in [2, \infty)$, to dla każdego $\lambda > \omega$ istnieje $C \geq 0$, takie że $D((\lambda + iA)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}) \subseteq D(f(A))$ oraz

$$\|f(A)x\|_X \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)}\|(\lambda + iA)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}x\|_X \tag{5.8}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ i $x \in D((\lambda + iA)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}})$.

Można powiedzieć, że wyniki te pokazują, że A ma ograniczony rachunek funkcyjny $\mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ z $(D(A), X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1}$ do X, jeśli X ma typ p i kotyp q oraz z $D((\lambda + \mathrm{i}A)^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}})$ do X przy dodatkowych założeniach na X. Przestrzenie interpolacji $D_A(\theta, 1)$ i dziedziny ułamkowe $D((\lambda + \mathrm{i}A)^{-\theta})$ rosną, gdy θ dąży do zera. Stąd Twierdzenie 5.1 i (5.8) pokazują, że w rozważanym tutaj przypadku ograniczenia rachunku funkcyjnego $\mathcal{H}^\infty$ zależą w sposób ilościowy od tego, jak bliska przestrzeni Hilberta jest geometria przestrzeni bazowej.

Wyniki te mają także zastosowania do schematów aproksymacji numerycznych dla C_0-grup. Wspomnimy tutaj dwa z nich. Po pierwsze, ważnym problemem w teorii operatorów jest określenie, kiedy *transformata Cayleya* $(1-A)(1+A)^{-1}$ operatora A z $-1 \in \rho(A)$ jest potęgowo ograniczona. Własność ta jest z kolei równoważna stabilności schematu aproksymacji Cranka-Nicolson stowarzyszonego z A. Możemy użyć twierdzenia 5.1, aby otrzymać stabilność tegoż schematu aproksymacji dla odpowiednich danych początkowych.

Wniosek 5.2. *Niech $-A$ generuje stabilną wykładniczo C_0-półgrupę $(T(t))_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ na przestrzeni Banacha X typu $p \in [1, 2]$ i kotypu $q \in [2, \infty)$. Załóżmy, że $T(t)$ jest odwracalne dla każdego $t \geq 0$. Wówczas*

$$\sup_{n\geq 1} \|(1 - A)^n(1 + A)^{-n}\|_{\mathcal{L}((D(A),X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1},X)} < \infty.$$

Drugie zastosowanie dotyczy zbieżności wymiernych schematów aproksymacji. Funkcja wymierna $r \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$ na zespolonej lewej półpłaszczyźnie

$$\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\} \tag{5.9}$$

jest *$\mathcal{A}$-stabilna*, jeśli $\|r\|_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)} \leq 1$, a r jest *wymierną aproksymacją (funkcji wykładniczej)*, jeśli istnieją $k \in \mathbb{N}$ i $C \geq 0$, takie że $|r(z) - \mathrm{e}^z| \leq C|z|^{k+1}$ dla wszystkich z z zespolonego otoczenia 0.

Wniosek 5.3. *Niech r będzie $\mathcal{A}$-stabilną wymierną aproksymacją i niech $-A$ generuje stabilną wykładniczo C_0-półgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ na przestrzeni Banacha X typu $p \in [1, 2]$ i kotypu $q \in [2, \infty)$. Załóżmy, że $T(t)$ jest odwracalne dla każdego $t \geq 0$. Wówczas $r(-\frac{t}{n}A)^n x \to T(t)x$ gdy $n \to \infty$ dla każdego $x \in (D_A, X)_{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},1}$.*

We Wnioskach 5.2 i 5.3 przy założeniach (5.8) otrzymujemy stabilność i zbieżność dla danych początkowych w dziedzinach odpowiednich ułamkowych potęg A.

[2] Założenie to zachodzi np. jeśli $X = L^r(\Omega)$ dla pewnej przestrzeni miary Ω i $r < \infty$ z $p = \min(2, r)$ oraz $q = \max(2, r)$.

5.3. **Rozkład reprezentacji dodatniej grupy izometrii na L^p-przestrzeniach.** Jednym z ważnych punktów w abstrakcyjnej teorii reprezentacji jest spostrzeżenie, że każdą silnie ciągłą unitarną reprezentację $\pi : G \to \mathcal{L}(X)$ ośrodkowej lokalnie zwartej grupy Hausdorffa G na ośrodkowej przestrzeni Hilberta X można rozłożyć na reprezentacje nieprzywiedlne. Ponieważ każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta jest izomorficzna z $L^2(\Omega, \mu)$ dla pewnej miary probabilistycznej μ, twierdzenie to zasadniczo dotyczy teorii przestrzeni L^2.

Na $L^p(\Omega, \mu)$ dla $p \neq 2$ struktura kraty daje (zazwyczaj słabszy) substytut struktury przestrzeni Hilberta. Przykładowo reprezentacje unitarne możemy zastąpić reprezentacjami G jako *izomorfizmami kratowymi* na $L^p(\Omega, \mu)$, tj. reprezentacjami $\pi : G \to L^p(\Omega, \mu)$, dla których

$$\pi(g)(\max(f_1, f_2)) = \max(\pi(g)f_1, \pi(g)f_2)$$

dla wszystkich $g \in G$ i $f_1, f_2 \in L^p(\Omega, \mu)$. Ponadto istnieje naturalny zamiennik nieprzywiedlności w kontekście uporządkowanych przestrzeni wektorowych. Dokładniej rzecz ujmując, mówimy, że reprezentacja $\rho : G \to E$ grupy G na uporządkowanej przestrzeni wektorowej E jest *nieprzywiedlna ze względu na porządek*, jeśli $\{0\}$ i E są jedynymi niezmienniczymi *półkratami*. Wprowadzenie drugiego z tych pojęć w pełnej ogólności wyprowadziłoby nas zbyt daleko, więc zamiast tego odsyłamy do [1, 83]. Jednakże w naszych rozważaniach wszystkie półkraty są jak w (5.10) poniżej. Zwracamy również uwagę na fakt, iż pojęcie nieprzywiedlności ze względu na porządek zależy od wyboru miary μ na Ω.

Naturalnym wydaje się zatem pytanie, czy możliwy jest rozkład dowolnej silnie ciągłej reprezentacji G w postaci izomorfizmów kratowych na $L^p(\Omega, \mu)$ na reprezentacje nieprzywiedlne ze względu na porządek. W (R8) pokazaliśmy, że istotnie możemy tak zrobić przy dodatkowych założeniach. Nieprecyzyjne sformułowanie głównego wyniku wygląda następująco.

Twierdzenie 5.4. *Niech G będzie lokalnie zwartą grupą polską. Przyjmijmy $1 \leq p < \infty$ i niech (Ω, μ) będzie ośrodkową przestrzenią probabilistyczną. Niech $\pi : G \to \mathcal{L}(L^p(X, \mu))$ będzie silnie ciągłą reprezentacją G jako izometryczne izomorfizmy kratowe, które nie zmieniają stałych. Wówczas możemy rozłożyć π na reprezentacje nieprzywiedle ze względu na porządek.*

Przedstawimy tutaj krótki zarys składników wchodzących w skład dowodu tego twierdzenia, które z kolei powinny pozwolić czytelnikowi nieco lepiej zrozumieć sformułowanie wyniku. Dowód składa się z następujących kroków.

Krok 1. Mała modyfikacja [28, Twierdzenie 15.27] (dla przypadku $p = 1$) implikuje istnienie zwartej przestrzeni metrycznej K, ciągłego działania $G \times K \to K$, $(g, k) \mapsto gk$, G-niezmienniczej regularnej borelowskiej miary probabilistycznej ν na K i izometrycznego izomorfizmu kratowego $\Phi : L^p(\Omega, \mu) \to L^p(K, \nu)$, dla których

$$\Phi(\pi(g)f) = \rho(g)\Phi(f)$$

dla wszystkich $g \in G$ i $f \in L^p(\Omega, \mu)$. Tutaj, jak i poniżej, $\rho : G \to \mathcal{L}(L^p(K, \nu))$ jest reprezentacją kanoniczną G na $L^p(K, \nu)$, indukowaną przez działanie G na K:

$$\rho(g)h(k) := h(g^{-1}k)$$

dla $g \in G$, $h \in L^p(K, \nu)$ i $k \in K$. Stąd dla naszych rozważań reprezentacje π i ρ są równoważne, więc w tym, co następuje, możemy skupiać się na rozkładzie ρ na reprezentacje nieprzywiedlne ze względu na porządek.

Krok 2. Dla miary probabilistycznej λ na K reprezentacja $\rho : G \to L^p(K, \lambda)$ jest nieprzywiedlna ze względu na porządek wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest ergodyczna. Wynik ten jest bezpośrednią konsekwencją definicji ergodyczności i faktu, iż $B \subseteq L^p(K, \lambda)$ jest półkratą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór borelowski $L \subseteq K$, taki że

$$B = \{f \in L^p(K, \lambda) \mid f(k) = 0 \text{ for } \lambda\text{-almost all } k \in L\}, \tag{5.10}$$

co z kolei wynika z [83, str. 44].

Step 3. Możemy rozłożyć miarę ν na miary ergodyczne. Dokładniej rzecz ujmując, niech $\mathcal{E}$ oznacza zbiór ergodycznych borelowskich miar probabilistycznych na K wyposażonych w słabą* topologię, indukowaną przez inkluzję $\mathcal{E} \subseteq (C(K))^*$. Wówczas [84, Twierdzenie 27.5.7] daje następujący wynik.

Twierdzenie 5.5. *Mamy $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Co więcej, istnieje borelowska funkcja mierzalna $\beta : K \to \mathcal{E}$, $k \mapsto \beta_k$, taka że:*

- *$\beta_{gk} = \beta_k$ dla wszystkich $g \in G$ i $k \in K$,*
- *$\lambda(\beta^{-1}(\{\lambda\})) = 1$ dla każdego $\lambda \in \mathcal{E}$,*
- *dla wszystkich zbiorów borelowskich $L \subset K$ mamy*

$$\nu(L) = \int_K \beta_k(L)\,\mathrm{d}\nu(k).$$

W szczególności miara obrazowa ν_β zadana przez ν poprzez β jest dobrze zdefiniowaną borelowską miarą probabilistyczną na $\mathcal{E}$. Ponadto, zaczynając od funkcji prostych i następnie używając aproksymacji, otrzymujemy z Twierdzenia 5.5, że $\lambda \mapsto \|f\|_{L^p(K,\lambda)}$ jest funkcją mierzalną na $\mathcal{E}$ dla każdego $f \in L^p(K,\nu)$ oraz

$$\|f\|_{L^p(K,\nu)} = \Big(\int_{\mathcal{E}} \|f\|^p_{L^p(K,\lambda)} \mathrm{d}\nu_\beta(\lambda)\Big)^{1/p}. \tag{5.11}$$

Krok 4. Kroki od 1 do 3 w sumie odzwierciedlają ideę dowodu Twierdzenia 5.4. Mówiąc precyzyjniej, zaczynamy od redukcji do przypadku, gdy mamy działanie G na bazowej przestrzeni probabilistycznej. Następnie jednoznaczny opis półkrat w L^p pozwala scharakteryzować odpowiadające reprezentacje nieprzywiedlne jako stowarzyszone z miarami ergodycznymi. W kolejnym, trzecim kroku rozkładamy miarę ν na miary ergodyczne w odpowiednim sensie, a w konsekwencji normę $L^p(K,\nu)$ na normy $L^p(K,\lambda)$ dla ergodycznych miar probabilistycznych λ na K. Pozostaje jednak przetłumaczenie tegoż rozkładu norm na pełen rozkład bazowych L^p przestrzeni.

Na przestrzeniach Hilberta mamy ustanowioną teorię całek prostych, na której mogliśmy do tej pory polegać. Podobną teorię całek prostych na przestrzeniach Banacha wykształcono w [42] i możemy ją zastosować do naszych badań po niewielkich modyfikacjach, które opisujemy poniżej.

Niech V będzie przestrzenią wektorową i niech $\{\|\cdot\|_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{E}}$ będzie zbiorem półnorm $\|\cdot\|_\lambda$ na V, takich że $\lambda \mapsto \|x\|_\lambda$ jest funkcją mierzalną na $\mathcal{E}$ dla wszystkich $x \in V$. Dla każdego $\lambda \in \mathcal{E}$ niech X_λ będzie uzupełnieniem do przestrzeni Banacha przestrzeni V w odniesieniu do $\|\cdot\|_\lambda$. Wówczas odwzorowanie $s : \mathcal{E} \to \sqcup_{\lambda\in\mathcal{E}} X_\lambda$ nazywamy *sekcją* $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{E}}$, gdy $s(\lambda) \in X_\lambda$ dla każdego $\lambda \in \mathcal{E}$, a *sekcją prostą* nazywamy sekcję s, dla której istnieją $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ i mierzalne $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{E}$, dla których $s(\lambda) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\mathcal{E}_i}(\lambda)x_i$ dla wszystkich $\lambda \in \mathcal{E}$. *Sekcją mierzalną* nazywamy sekcję s, dla ktorej istnieją sekcje proste s_n dla $n \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $\lambda \in \mathcal{E}$ mamy $s_n(\lambda) \to s(\lambda)$ w X_λ gdy $n \to \infty$. Dla $p \in [1,\infty)$ L^p *całką prostą* $(\int_{\mathcal{E}}^{\oplus} X_\lambda \,\mathrm{d}\nu_\beta(\lambda))_{L^p}$ z $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{E}}$ (ze względu na ν_β) nazywamy przestrzeń sekcji mierzalnych s z $(X_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{E}}$, dla których

$$\Big(\int_{\mathcal{E}}^{\oplus} \|s(\lambda)\|_{X_\lambda} \,\mathrm{d}\nu_\beta(\lambda)\Big)^{1/p} < \infty, \tag{5.12}$$

przy czym dwie sekcje utożsamiamy ze sobą, gdy pokrywają się z dokładnością do zbioru ν_β-miary zero, z naturalną normą stowarzyszoną. Jeśli X_λ, $\lambda \in \mathcal{E}$, są kratami Banacha, to $(\int_{\mathcal{E}}^{\oplus} X_\lambda \,\mathrm{d}\nu_\beta)_{L^p}$ jest kratą Banacha z naturalnym stowarzyszonym porządkiem.

Teraz możemy zastosować powyższy schemat postępowania dla V będącego zbiorem funkcji prostych na K i dla $\|f\|_\lambda := \|f\|_{L^p(K,\lambda)}$ dla wszystkich $\lambda \in \mathcal{E}$ i $f \in V$. Wówczas z (5.11) i (5.12) otrzymujemy, że

$$L^p(K,\nu) = \Big(\int_{\mathcal{E}}^{\oplus} L^p(K,\lambda)\,\mathrm{d}\nu_\beta(\lambda)\Big)_{L^p}.$$

Co więcej, możemy rozłożyć reprezentację kanoniczną G na $L^p(K,\nu)$ indukowaną przez działanie G na K na reprezentacje kanoniczne G na wszystkich $L^p(K,\lambda)$. W ten sposób otrzymujemy ostatecznie narzędzie by zarówno sformalizować sformułowanie Twierdzenia 4.13, jak i ukończyć jego dowód.

5.4. **Operatorowe funkcje Lipschitza na przestrzeniach Banacha.** Podobnie jak (R7), (R10) i (R11), teoria operatorowych funkcji Lipschitza zajmuje się problemem teorii rachunku funkcyjnego. Jednakże w tym wypadku baza jest nieco inna. Dokładniej rzecz ujmując, interesuje nas wskazanie funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dla których istnieje $C \geq 0$, takie że

$$\|f(B) - f(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\|B - A\|_{\mathcal{L}(X)} \tag{5.13}$$

zachodzi dla odpowiedniej klasy operatorów A i B na przestrzeni Banacha X, dla których operatory $f(A)$ i $f(B)$ są dobrze zdefiniowane poprzez rachunek funkcyjny. W większej ogólności rozważa się oszacowania komutatorów postaci

$$\|f(B)S - Sf(A)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq C\|BS - SA\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \tag{5.14}$$

dla przestrzeni Banacha X i Y, przy czym $A \in \mathcal{L}(X)$, $B \in \mathcal{L}(Y)$ i $S \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Problem ten był szeroko badany w przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta, a A i B są operatorami normalnymi. W tym kontekście (5.13) ustalił Peller w [62, 63] dla f należącego do jednorodnej przestrzeni Besova $\dot{B}^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$. Jego wynik, jak i wcześniejsze prace (porównaj [17–19]), opierał się na teorii tzw. *podwójnych całek operatorowych*. Metoda ta rozpatruje różnicę $f(B) - f(A)$ jako obraz pewnej transformacji $B - A$. Następnie bada się tę transformację i w przypadku, gdy iloraz różnicowy $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ funkcji f jest wystarczająco regularny, jesteśmy w stanie ograniczyć normę tejże transformacji, by wywnioskować upragniony wynik.

W tym sensie podejście użyte do udowodnienia (5.13) jest analogiczne do metod przenoszenia opisanych w Rozdziale 5.2. Aby oszacować $\|f(B) - f(A)\|_{\mathcal{L}(X)}$, powiązujemy to wyrażenie z lepiej rozumianą transformacją. Następnie używamy innych metod, by ograniczyć normę tejże transformacji. Ponadto transformacje, które otrzymujemy w ten sposób, są (ciągłymi wersjami) tzw. *mnożników Schura*. Mnożniki te można traktować jako nieprzemienne warianty mnożników Fouriera, co wzmacnia analogię między metodami przenoszenia a teorią podwójnych całek operatorowych.

Naturalnym wydaje się pytanie, czy istnieje analog wyniku Pellera dotyczący (5.13) na ogólnej przestrzeni Banacha X. Jak pokazaliśmy w (R9), istotnie tak jest. W tym wypadku musimy uogólnić rachunek spektralny dla operatorów normalnych, którego używamy do zdefiniowania $f(A)$ i $f(B)$, co prowadzi do klasy tzw. *operatorów typu skalarnego* (porównaj np. [10]). Dowodzimy wówczas w (R9), że przy odpowiednich założeniach na X dla każdego $f \in \dot{B}^1_{\infty,1}(\mathbb{R})$ (5.13) zachodzi dla klasy operatorów typu skalarnego $A, B \in \mathcal{L}(X)$ z rzeczywistym spektrum i stałymi spektralnymi ograniczonymi przez ustaloną wartość oraz podobnie dla (5.14).

Z drugiej strony wiadomo, że (5.13) i (5.14) nie zachodzą[3] dla ogólnej funkcji Lipschitza f na $\mathbb{R}$. Dokładniej rzecz ujmując, własności te psują się już dla być może najprostrzej nietrywialnej funkcji Lipschotza: funkcji wartości bezwzględnej (porównaj [51]). W (R9) pokazaliśmy, że (5.14) zachodzi dla f będącego funkcją wartości bezwzględnej, gdy ograniczymy się do klasy *operatorów diagonalizowalych* $A \in \mathcal{L}(\ell^p)$ i $B \in \mathcal{L}(\ell^q)$ z rzeczywistym spektrum i stałymi diagonalizowalności ograniczonymi przez ustaloną wartość i dla dowolnego $S \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^q)$, o ile $p < q$. Ponieważ dowolna nieskończenie wymiarowa ośrodkowa przestrzeń Hilberta jest izomorficzna z ℓ^2, pokazuje to, że fakt, iż (5.14) nie zachodzi na przestrzeniach Hilberta, można przezwyciężyć rozważając w zastępstwie oszacowania komutatora między ℓ^p a ℓ^q dla $p < q$. Wówczas otrzymujemy niezależne od wymiaru operatorowe oszacowania lipschitzowskie na wartość bezwzględną (skończonych) macierzy diagonalizowalnych.

5.5. **Rachunek funkcyjny na rzeczywistych przestrzeniach interpolacji dla generatorów C_0-grup.** Artykuł (R10) zajmuje się teorią rachunku funkcyjnego w bardzo podobnym przypadku co (R7). Mówiąc precyzyjniej, niech $-iA$ generuje C_0-grupę $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ na przestrzeni Banacha X i niech $M, \omega' \geq 0$ będą takie, że $\|U(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega'|s|}$ dla każdego $s \in \mathbb{R}$. Dla $\omega > \omega'$ i $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$, gdzie St_ω jest jak w (5.4), istnieje naturalna definicja $f(A)$ jako nieograniczonego operatora na X, dla której chcielibyśmy określić warunki na X, A i f, dla których $f(A)$ jest operatorem ograniczonym między odpowiednimi

[3] Istnieją modyfikacje (5.13) i (5.14), które są prawdziwe dla wszystkich funkcji Lipschitza f poprzez zastąpienie jednorodnej normy operatorowej przez normy innych ideałów operatorowych, takich jak klasy Schattena (porównaj np. [65]).

podprzestrzeniami X. W (R7) pokazaliśmy, że dla każdego $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ operator $f(A)$ jest ograniczony z rzeczywistych przestrzeni interpolacji $(D(A), X)_{\theta,q}$ do X dla pewnych $\theta \in [0,1]$ i $q \in [1,\infty]$ przy założeniach na typ i kotyp X. Z drugiej strony (R10) rozważa ograniczoność $f(A)$ na samych rzeczywistych przestrzeniach interpolacji $(D(A), X)_{\theta,q}$.

Strategia postępowania przy szukaniu tego typu wyników jest analogiczna do tej w (R10). Dokładniej rzecz ujmując, używamy tej samej zasady przenoszenia co wcześniej w (5.5), ale tym razem z $Y = Z = (D(A), X)_{\theta,q}$ i $F_1 = F_2 = B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})$ dla $\theta \in [0,1]$, $q \in [1,\infty]$ i $p \in [1,\infty)$. Wówczas wariant twierdzenia Mikhlina o mnożnikach na przestrzeniach Besova (porównaj [34, 46]) daje następujący wynik. Przypomnijmy, że $\mathcal{H}^\infty_1(\mathrm{St}_\omega)$ jest jak w (5.6).

Twierdzenie 5.6. *Niech $-iA$ generuje C_0-grupę na przestrzeni Banacha X i niech $M, \omega' \geq 0$ będą takie, że $\|U(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega'|s|}$ dla każdego $s \in \mathbb{R}$. Wówczas dla wszystkich $\omega > \omega'$, $\theta \in (0,1)$ i $q \in [1,\infty]$ istnieje $C \geq 0$, takie że prawdziwe jest następujące stwierdzenie. Dla każdego $f \in \mathcal{H}^\infty_1(\mathrm{St}_\omega)$ mamy $(D(A), X)_{\theta,q} \subseteq D(f(A))$ oraz dla każdego $x \in (D(A), X)_{\theta,q}$ mamy $f(A)x \in (D(A), X)_{\theta,q}$ i*

$$\|f(A)x\|_{(D(A),X)_{\theta,q}} \leq C\|x\|_{(D(A),X)_{\theta,q}}.$$

Siła Twierdzenia 5.6 leży w tym, że nie wymaga ono założeń na bazową przestrzeń Banacha. Na przestrzeniach UMD wniosek wynika z [37], przestrzeniach nierefleksywnych, jak choćby L^1 przestrzenie lub przestrzenie funkcji ciągłych, Twierdzenie 5.6 jest nowym wynikiem.

5.6. **Rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup poprzez przenoszenie.** Artykuł (R11) skupia się także na teorii rachunku funkcyjnego $\mathcal{H}^\infty$, choć tym razem dla generatorów półgrup. Mówiąc precyzyjniej, niech A będzie generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ na przestrzeni Banacha X, takim że istnieją $M, \omega' > 0$, dla których $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\omega' t}$ dla wszystkich $t \geq 0$. Wówczas dla każdego $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$, gdzie $\mathbb{C}_-$ jest lewą zespoloną półpłaszczyzną z (5.9), istnieje naturalna definicja $f(A)$ jako nieograniczonego operatora na X i chcielibyśmy zbadać warunki na X, A i f, które gwarantowałyby ograniczoność $f(A)$ między pewnymi podprzestrzeniami X.

Możemy tutaj ponownie polegać na silnej zasadzie przenoszenia w (5.5), choć przypadek generatorów półgrup różni się od przypadku generatorów grup. De facto musi tak być, gdyż nawet na przestrzeniach Hilberta nie wszystkie generatory półgrupy jak wyżej mają ograniczony rachunek $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$, podczas gdy możemy wykorzystać zasadę przenoszenia dla grup, by pokazać, że każdy generator grupy na przestrzeni Hilberta ma ograniczony rachunek $\mathcal{H}^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ dla odpowiedniego $\omega > 0$, jak w (5.8) dla $p = q = 2$.

Zamiast tego stosujemy (5.5) do $f(z) := e^{\tau z} g(z)$ dla $\tau > 0$, $g \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$ i $z \in \mathbb{C}_-$. Wówczas z innymi ι i P przyjmujemy $Y = Z = X$ i $F_1 = F_2 = L^p(\mathbb{R}; X)$ oraz $S_f = T_{m_f}$ jako mnożnik Fouriera z symbolem $m_f(\xi) = f(i\xi)$ for $\xi \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest przestrzenią Hilberta, to otrzymany w ten sposób diagram przemienny pomaga udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.7. *Niech A będzie generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ na przestrzeni Hilberta X, takim że istnieją $M, \omega' \geq 0$, dla których $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\omega' t}$ dla każdego $t \geq 0$. Wówczas istnieje $C \geq 0$, takie że $f(A)T(\tau) \in \mathcal{L}(X)$ dla wszystkich $\tau > 0$ i $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$ oraz*

$$\|f(A)T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \log(|\tau|)\|f\|_{\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)} \text{ as } \tau \to 0. \tag{5.15}$$

Ogólniej rzecz biorąc, spodziewamy się pewnego wybuchu w τ w (5.15), gdyż w przeciwnym razie każdy generator półgrupy stabilnej wykładniczo miałby ograniczony rachunek $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$. Ale możemy użyć faktu, iż wybuch jest co najwyżej logarytmiczny, aby pokazać, że $f(A)(-A)^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$ dla każdego $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C}_-)$ i wszystkich $\alpha > 0$. To z kolei implikuje stabilność odpowiednich numerycznych metod aproksymacji dla orbit półgrupy $t \mapsto T(t)x$, jeśli $x \in D((-A)^\alpha)$ dla pewnego $\alpha > 0$.

5.7. **Zbieżność subdiagonalnych przybliżeń Padégo C_0-półgrup.** Jak zaznaczyliśmy w Rozdziałach 5.2 i 5.6, teoria rachunku funkcyjnego ma zastosowania do numerycznych metod aproksymacji dla silnie ciągłych półgrup i grup. Z drugiej strony w (R12) konkretna metoda aproksymacji numerycznej jest głównym obiektem zainteresowań, a nie tylko zastosowaniem innych wyników.

Mówiąc precyzyjniej, oznaczmy przez A generator jednostajnie ograniczonej C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ na przestrzeni Banacha X. W [48, Uwaga 3] pytano, czy istnieją liczby zespolone $\lambda_{n,m}$ i $b_{n,m}$, takie że $(T(t))_{t\geq 0}$ można przybliżyć w silnym sensie na $D(A)$ przez sumy postaci

$$\frac{b_{n,1}}{t}\big(\frac{\lambda_{n,1}}{t}-A\big)^{-1}+\cdots+\frac{b_{n,m_n}}{t}\big(\frac{\lambda_{n,m_n}}{t}-A\big)^{-1},\quad t>0, \tag{5.16}$$

gdy $n\to\infty$ (porównaj także [61]).

By odpowiedzieć na to pytanie, oznaczmy przez $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ ciąg *subdiagonalnych przybliżeń Padégo* funkcji wykładniczej (porównaj np. [40]). Rozbijając każde r_n na ułamki proste, otrzymujemy, iż $r_n(tA)$ ma postać (5.16). Stąd wystarczy pokazać, że $r_n(tA)x\to T(t)x$ gdy $t\to\infty$ dla każdego $x\in D(A)$. Eksperymenty numeryczne sugerują, że istotnie tak jest ze zbieżnością w tempie $O(1/\sqrt{n})$. W (R12) odpowiedzieliśmy na pytanie z [48] twierdząco z tempem sugerowanym przez eksperymenty numeryczne. Mówiąc śliślej, udowodniliśmy następujący wynik.

Twierdzenie 5.8. *Niech A będzie generatorem C_0-półgrupy $(T(t))_{t\geq 0}$ na przestrzeni Banacha X, takiej że istnieje $M\geq 0$, dla którego $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq M$ dla wszystkich $t\geq 0$. Wówczas dla każdego $\alpha>1/2$ istnieje $C\geq 0$, takie że*

$$\|r_n(tA)x-T(t)x\|_X\leq CMt^{\alpha}(n+1)^{-\alpha+\frac{1}{2}}\|(-A)^{\alpha}x\|_X$$

dla wszystkich $x\in X$, $t\geq 0$ i $n\geq\alpha-\frac{1}{2}$.

Ponadto otrzymujemy poprawienia Twierdzenia 5.8 dla półgrup analitycznych, jak również dla stabilnych wykładniczo półgrup na przestrzeniach Hilberta. De facto poprawienie w tym drugim przypadku polega na wynikach z (R11).

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

6.1. Nauczanie.

- Kierownik i wykładowca, Probability Theory with Applications. Australijski Uniwersytet Narodowy, Australia. 2018-2020.
- Wykładowca, Analysis 2. Uniwersytet Warszawski, Polska. 2016.
- Wykładowca, Analysis 1. Uniwersytet Warszawski, Polska. 2015-2017.
- Asystent, Functional Analysis. Krajowy kurs magisterski, Holandia. 2014-2015.
- Wykładowca, Analysis 1. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandia. 2014.
- Asystent, Applied Functional Analysis. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandia. 2014.
- Wykładowca, Linear Algebra 2. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandia. 2013.
- Wykładowca, Analysis 1. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandia. 2013.
- Wykładowca, Calculus B. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandia. 2012.
- Wykładowca, Linear Algebra. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandia. 2011-2013.
- Asystent, Algebraic Geometry. Krajowy kurs magisterski, Holandia. 2010-2011.
- Asystent, Analysis. Uniwersytet w Lejdzie, Holandia. 2010.

6.2. Działalność organizacyjna.

- Organizator seminarium. Instytut Nauk Matematycznych, Australijski Uniwersytet Narodowy, 2018-2020.
- Współorganizator konferencji "Positivity VII: the Zaanen Centennial Conference". Uniwersytet w Lejdzie, Lejda, Holandia, 22-26 lipca 2013. strona internetowa: http://websites.math.leidenuniv.nl/positivity2013/.
- Lokalny koordynator 15. i 16. Seminarium Internetowego o Równaniach Ewolucyjnych. Uniwersytet Techniczny w Delfcie, Holandiaoraz oraz Blaubeuren, Niemcy. 2011-2013.

Literatura

[1] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis. *An invitation to operator theory*, volume 50 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] H. Amann. Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications. *Math. Nachr.*, 186:5–56, 1997.

[3] A. Amenta. Tent spaces over metric measure spaces under doubling and related assumptions. In *Operator theory in harmonic and non-commutative analysis*, volume 240 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 1–29. Birkhäuser/Springer, Cham, 2014.

[4] N. Anantharaman and M. Léautaud. Sharp polynomial decay rates for the damped wave equation on the torus. *Anal. PDE*, 7(1):159–214, 2014. With an appendix by Stéphane Nonnenmacher.

[5] W. Arendt. Semigroups and evolution equations: Functional calculus, regularity and kernel estimates. In C.M.Dafermos E. Feireisl, editor, *Handbook of Differential Equations*, pages 1–85. Elsevier/North Holland, Amsterdam, 2004.

[6] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, volume 96 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, second edition, 2011.

[7] P. Auscher. On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 186(871):xviii+75, 2007.

[8] P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh, and Ph. Tchamitchian. The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$. *Ann. of Math. (2)*, 156(2):633–654, 2002.

[9] P. Auscher, C. Kriegler, S. Monniaux, and P. Portal. Singular integral operators on tent spaces. *J. Evol. Equ.*, 12(4):741–765, 2012.

[10] W. G. Bade. Unbounded spectral operators. *Pacific J. Math.*, 4:373–392, 1954.

[11] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5):1024–1065, 1992.

[12] A. Bátkai, K.-J. Engel, J. Prüss, and R. Schnaubelt. Polynomial stability of operator semigroups. *Math. Nachr.*, 279(13-14):1425–1440, 2006.

[13] C. Batty, R. Chill, and Y. Tomilov. Fine scales of decay of operator semigroups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(4):853–929, 2016.

[14] C. Batty and T. Duyckaerts. Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces. *J. Evol. Equ.*, 8(4):765–780, 2008.

[15] C. Batty and S. Srivastava. The non-analytic growth bound of a C_0-semigroup and inhomogeneous Cauchy problems. *J. Differential Equations*, 194(2):300–327, 2003.

[16] E. Berkson, T. A. Gillespie, and P. S. Muhly. Generalized analyticity in UMD spaces. *Ark. Mat.*, 27(1):1–14, 1989.

[17] M. Š. Birman and M. Z. Solomjak. Double Stieltjes operator integrals. In *Probl. Math. Phys., No. I, Spectral Theory and Wave Processes (Russian)*, pages 33–67. Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, 1966.

[18] M. Š. Birman and M. Z. Solomjak. Double Stieltjes operator integrals. II. In *Problems of Mathematical Physics, No. 2, Spectral Theory, Diffraction Problems (Russian)*, pages 26–60. Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, 1967.

[19] M. Š. Birman and M. Z. Solomjak. Double operator integrals in a Hilbert space. *Integral Equations Operator Theory*, 47(2):131–168, 2003.

[20] A. Borichev and Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.*, 347(2):455–478, 2010.

[21] N. Burq. Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. *Acta Math.*, 180(1):1–29, 1998.

[22] N. Burq and P. Gérard. Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(7):749–752, 1997.

[23] R. Chill and D. Seifert. Quantified versions of Ingham's theorem. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 48(3):519–532, 2016.

[24] R. Coifman, Y. Meyer, and E. M. Stein. Some new function spaces and their applications to harmonic analysis. *J. Funct. Anal.*, 62(2):304–335, 1985.

[25] R. R. Coifman and G. Weiss. Transference methods in analysis. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Nebraska, May 31-June 4, 1976. Regional Conference Series in Mathematics. No.31. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS) 59, 1977.

[26] E. Cordero and F. Nicola. Boundedness of Schrödinger type propagators on modulation spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 16(3):311–339, 2010.

[27] A. Córdoba and C. Fefferman. Wave packets and Fourier integral operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 3(11):979–1005, 1978.

[28] T. Eisner, B. Farkas, M. Haase, and R. Nagel. *Operator theoretic aspects of ergodic theory*, volume 272 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2015.

[29] T. Eisner and H. Zwart. Continuous-time Kreiss resolvent condition on infinite-dimensional spaces. *Math. Comp.*, 75(256):1971–1985, 2006.

[30] K. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[31] Z. Fan, N. Liu, J. Rozendaal, and L. Song. Characterizations of the Hardy space $\mathcal{H}^1_{FIO}(\mathbb{R}^n)$ for Fourier integral operators. Submitted. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1908.01448, 2019.

[32] C. Fefferman. A note on spherical summation multipliers. *Israel J. Math.*, 15:44–52, 1973.

[33] G. Folland. *Harmonic analysis in phase space*, volume 122 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[34] M. Girardi and L. Weis. Operator-valued Fourier multiplier theorems on Besov spaces. *Math. Nachr.*, 251:34–51, 2003.

[35] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014.

[36] M. Haase. *The functional calculus for sectorial operators*, volume 169 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[37] M. Haase. A transference principle for general groups and functional calculus on UMD spaces. *Math. Ann.*, 345(2):245–265, 2009.

[38] M. Haase. The functional calculus approach to cosine operator functions. In *Recent Trends in Analysis. Proceedings of the Conference in honor of N.K. Nikolski held in Bordeaux 2011*, pages 123–147. Theta Foundation, 2013.

[39] M. Haase and J. Rozendaal. Functional calculus on real interpolation spaces for generators of C_0-groups. *Math. Nachr.*, 289(2-3):275–289, 2016.

[40] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Stiff and differential-algebraic problems, Second revised edition, paperback.

[41] A. Hassell and J. Rozendaal. L^p and $\mathcal{H}^p_{FIO}$ regularity for wave equations with rough coefficients, Part I. Preprint available at https://arxiv.org/abs/2010.13761, 2020.

[42] R. Haydon, M. Levy, and Y. Raynaud. *Randomly normed spaces*, volume 41 of *Travaux en Cours [Works in Progress]*. Hermann, Paris, 1991.

[43] B. Helffer and J. Sjöstrand. From resolvent bounds to semigroup bounds. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1001.4171v1, 2009.

[44] S. Hofmann, G. Lu, D. Mitrea, M. Mitrea, and L. Yan. Hardy spaces associated to non-negative self-adjoint operators satisfying Davies-Gaffney estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 214(1007):vi+78, 2011.

[45] L. Hörmander. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Math.*, 104:93–140, 1960.

[46] T. Hytönen. Fourier embeddings and Mihlin-type multiplier theorems. *Math. Nachr.*, 274/275:74–103, 2004.

[47] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. *Analysis in Banach spaces. Vol. II*, volume 67 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, 2017. Probabilistic methods and operator theory.

[48] P. Jara, F. Neubrander, and K. Özer. Rational inversion of the Laplace transform. *J. Evol. Equ.*, 12(2):435–457, 2012.

[49] N. Kalton, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. Embedding vector-valued Besov spaces into spaces of γ-radonifying operators. *Math. Nachr.*, 281(2):238–252, 2008.

[50] N.J. Kalton and L.W. Weis. The H^∞-calculus and square function estimates. In *Nigel J. Kalton Selecta, Volume 1*, pages 715–764. Springer, 2016.

[51] T. Kato. Continuity of the map $S \mapsto |S|$ for linear operators. *Proc. Japan Acad.*, 49:157–160, 1973.

[52] H.-O. Kreiss. über Matrizen die beschränkte Halbgruppen erzeugen. *Math. Scand.*, 7:71–80, 1959.

[53] P. C. Kunstmann and L. Weis. Maximal L_p-Regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞-functional Calculus. In *Functional Analytic Methods for Evolution Equations (Levico Terme 2001)*, volume 1855 of *Lecture Notes in Math.*, pages 65–312. Springer, Berlin, 2004.

[54] Y. Latushkin and R. Shvydkoy. Hyperbolicity of semigroups and Fourier multipliers. In *Systems, approximation, singular integral operators, and related topics (Bordeaux, 2000)*, volume 129 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 341–363. Birkhäuser, Basel, 2001.

[55] Y. Latushkin and V. Yurov. Stability estimates for semigroups on Banach spaces. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(11-12):5203–5216, 2013.

[56] G. Lebeau. Équation des ondes amorties. In *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, volume 19 of *Math. Phys. Stud.*, pages 73–109. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[57] Z. Liu and B. Rao. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Z. Angew. Math. Phys.*, 56(4):630–644, 2005.

[58] A. Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.

[59] A. Miyachi. On some estimates for the wave equation in L^p and H^p. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(2):331–354, 1980.

[60] A. Miyachi. On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbf{R}^n)$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(1):157–179, 1980.

[61] F. Neubrander, K. Özer, and T. Sandmaier. Rational approximations of semigroups without scaling and squaring. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(11-12):5305–5317, 2013.

[62] V. V. Peller. Hankel operators in the theory of perturbations of unitary and selfadjoint operators. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(2):37–51, 96, 1985.

[63] V. V. Peller. Multiple operator integrals and higher operator derivatives. *J. Funct. Anal.*, 233(2):515–544, 2006.

[64] J. C. Peral. L^p estimates for the wave equation. *J. Funct. Anal.*, 36(1):114–145, 1980.

[65] D. Potapov and F. Sukochev. Operator-Lipschitz functions in Schatten-von Neumann classes. *Acta Math.*, 207(2):375–389, 2011.

[66] J. Ralston. Solutions of the wave equation with localized energy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22:807–823, 1969.

[67] J. Rauch and M. Taylor. Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(4):501–523, 1975.

[68] J. Rozendaal. *Functional Calculus via Transference, Double Operator Integrals and Applications*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2015. Online at http://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A5c24fed8-4187-460c-b4e4-b48054381fa5.

[69] J. Rozendaal. Characterizations of Hardy spaces for Fourier integral operators. To appear in Rev. Mat. Iberoam. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1907.02680, 2019.

[70] J. Rozendaal. Functional calculus for C_0-groups using type and cotype. *Q. J. Math.*, 70(1):17–47, 2019.

[71] J. Rozendaal. Rough pseudodifferential operators on Hardy spaces for Fourier integral operators. Preprint available at https://arxiv.org/abs/2010.13895, 2020.

[72] R. Schnaubelt. Exponential and polynomial dichotomies of operator semigroups on Banach spaces. *Studia Math.*, 175(2):121–138, 2006.

[73] A. Seeger, C. D. Sogge, and E. M. Stein. Regularity properties of Fourier integral operators. *Ann. of Math. (2)*, 134(2):231–251, 1991.

[74] H. Smith. A Hardy space for Fourier integral operators. *J. Geom. Anal.*, 8(4):629–653, 1998.

[75] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[76] J. van Neerven. *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators*, volume 88 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[77] J. van Neerven. Asymptotic behaviour of C_0-semigroups and γ-boundedness of the resolvent. *J. Math. Anal. Appl.*, 358(2):380–388, 2009.

[78] J. van Neerven. γ-radonifying operators—a survey. In *The AMSI-ANU Workshop on Spectral Theory and Harmonic Analysis*, volume 44 of *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.*, pages 1–61. Austral. Nat. Univ., Canberra, 2010.

[79] M. Veraar. Embedding results for γ-spaces. In *Recent trends in analysis. Proceedings of the conference in honor of Nikolai Nikolski on the occasion of his 70th birthday, Bordeaux, France, August 31 – September 2, 2011*, pages 209–219. Bucharest: The Theta Foundation, 2013.

[80] L. Weis. Stability theorems for semi-groups via multiplier theorems. In *Differential equations, asymptotic analysis, and mathematical physics (Potsdam, 1996)*, volume 100 of *Math. Res.*, pages 407–411. Akademie Verlag, Berlin, 1997.

[81] L. Weis. Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity. *Math. Ann.*, 319(4):735–758, 2001.

[82] L. Weis and V. Wrobel. Asymptotic behavior of C_0-semigroups in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(12):3663–3671, 1996.

[83] A. C. Zaanen. *Introduction to operator theory in Riesz spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[84] P. Zakrzewski. Measures on algebraic-topological structures. In *Handbook of measure theory, Vol. I, II*, pages 1091–1130. North-Holland, Amsterdam, 2002. Edited by E. Pap.