



dr hab. Tomasz Krawczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
krawczyk@tcs.uj.edu.pl

5 grudnia 2021 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym doktora Macieja Dołęgi

Doktor Maciej Dołęga przedłożył do oceny osiągnięcie naukowe pod tytułem *Struktura kombinatoryczna funkcji symetrycznych Jacka i Macdonalda, a własności enumeratywne grafów* składające się z następujących publikacji:

- [A] M. Dołęga, V. Féray: *Cumulants of Jack symmetric functions and b-conjecture*, Transactions of the American Mathematical Society 369, 2017, 9015–9039.
- [B] M. Dołęga: *Top degree part in b-conjecture for unicellular bipartite maps*, Electronic Journal of Combinatorics 24, 2017, P3.24.
- [C] G. Chapuy, M. Dołęga: *A bijection for rooted maps on general surfaces*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 145, 2017, 252–307.
- [D] M. Dołęga: *Strong factorization property of Macdonald polynomials and higher-order Macdonald's positivity conjecture*, Journal of Algebraic Combinatorics 46, 2017, 135–163.
- [E] M. Dołęga: *Macdonald cumulants, G-inversion polynomials and G-parking functions*, European Journal of Combinatorics, 75, 2019, 172–194.

Omówienie wskazanego osiągnięcia habilitacyjnego

Prace naukowe wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego poruszają zagadnienia z pogranicza teorii funkcji symetrycznych oraz kombinatoryki map. Główną ich tematyką jest jeden z najważniejszych problemów związanych z funkcjami symetrycznymi Jacka, zwany Hipotezą-b, która zakłada, że pewna funkcja określona na funkcjach symetrycznych Jacka jest funkcją tworzącą map dwudzielnych, uwzględniającą stopnie ich ścian i wierzchołków oraz ich orientowalność. Hipoteza-b została postawiona dwadzieścia kilka lat temu przez Gouldena i Jacksona i pomimo intensywnych prac w kierunku znalezienia jej dowodu, ciągle pozostaje otwarta. Osiągnięcie Habilitanta rozwiązuje częściowo Hipotezę-b i stanowi ważny krok w kierunku pełnego jej rozwiązania. Zanim przejdziemy do omówienia poszczególnych prac, wprowadzimy najpierw niezbędne pojęcia pozwalające przedstawić Hipotezę-b oraz główne wyniki rozprawy.

Przestrzeń wielomianów symetrycznych. Wielomian symetryczny przeliczalnej rodziny zmiennych $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots$ nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ to funkcja zmiennych $\mathbf{x}$, która po wyzerowaniu wszystkich swoich zmiennych poza dowolną ich skończoną liczbą staje się wielomianem symetrycznym (niezmienniczym ze względu na permutacje zmiennych) skończenie wielu zmiennych nad $\mathbb{Q}$. Zbiór takich wielomianów wraz z naturalnie zdefiniowaną operacją dodawania i mnożenia przez skalar stanowi przestrzeń wektorową, oznaczaną dalej przez $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Przykładowymi wielomianami symetrycznymi są:

- potęgowe funkcje symetryczne $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $p_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^n$,
- elementarne funkcje symetryczne $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $e_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_n}$.

Przestrzeń wektorowa $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, która ma wymiar nieskończony, rozkłada się na sumę prostą $\bigoplus \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ przestrzeni wektorowych wielomianów jednorodnych stopnia n . Przestrzeń wektorowa $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ ma już wymiar skończony, a jej elementy bazowe w sposób naturalny indeksować możemy podziałami liczby n . Podział λ liczby n , oznaczany przez $\lambda \vdash n$, to nierosnący ciąg l dodatnich liczb całkowitych $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l)$ spełniający warunek $\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$. Dla podziału $\lambda \vdash n$,

przez $l(\lambda)$ oznaczamy liczbę składników λ . Dla przykładu, potęgowe funkcje symetryczne definiują bazę $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ składającą się z wielomianów $\{p_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$, gdzie λ przebiega wszystkie podziały n , zaś p_λ jest zdefiniowane podstawieniem $p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot p_{\lambda_l}$. W sposób analogiczny możemy otrzymać bazę $\{e_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ elementarnych funkcji symetrycznych. Ważną bazą $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ w kontekście niniejszej rozprawy jest baza jednomianów symetrycznych $\{m_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$, gdzie m_λ dla podziału $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l)$ powstaje w wyniku symetryzacji jednomianu $x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_l^{\lambda_l}$.

Standardowo przestrzeń wektorową $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ wyposaża się w *iloczyn skalarny Halla*, zadany jednoznacznie na bazie funkcji potęgowych następującymi relacjami ortogonalności:

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle = \delta_{\mu, \lambda} z_\lambda, \quad \text{gdzie} \quad z_\lambda = \prod_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda) \quad \text{oraz} \quad m_i(\lambda) = |j : \lambda_j = i|.$$

Ważną rolę w kontekście niniejszej rozprawy odgrywają *wielomiany symetryczne Schura*. Wielomiany te definiować można na wiele równoważnych sposobów, między innymi można je otrzymać w wyniku procesu ortogonalizacji Grama-Schmidta zastosowanego do bazy jednomianów symetrycznych m_λ , przy czym wektory m_λ „ortogonalizujemy” w kolejności leksykograficznej określonej na podziałach λ .

Funkcje symetryczne Jacka i Macdonalda. Przestrzeń wielomianów symetrycznych rozważa się również nad ciałami innymi niż liczby wymierne $\mathbb{Q}$, między innymi nad ciałem $\mathbb{Q}(\alpha)$ funkcji wymiernych zmiennej α czy ciałem $\mathbb{Q}(q, t)$ funkcji wymiernych zmiennych q i t , nad ciałem $\mathbb{Q}$. W tak określonych przestrzeniach, oznaczonych przez $\Lambda_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ oraz $\Lambda_{\mathbb{Q}(q, t)}$ odpowiednio, możemy zdefiniować już *funkcje symetryczne Jacka* $J_\lambda^{(\alpha)}$ oraz *funkcje symetryczne Macdonalda* $J_\lambda^{(q, t)}$, które podobnie jak wielomiany Schura, otrzymać możemy algorytmem ortogonalizacji Grama-Schmidta zastosowanym do bazy jednomianów symetrycznych, zastępując iloczyn skalarny Halla jego (α) - oraz (q, t) -deformacją¹:

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle_{(\alpha)} = \delta_{\mu, \lambda} z_\lambda \alpha^{l(\lambda)} \quad \text{oraz} \quad \langle p_\mu, p_\lambda \rangle_{(q, t)} = \delta_{\mu, \lambda} z_\lambda \prod_i \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}.$$

W szczególności, funkcje symetryczne Schura powstają z funkcji Jacka w wyniku podstawienia $\alpha = 1$, zaś funkcje Jacka powstają z funkcji Macdonalda w wyniku podstawienia $q = t^\alpha$ i przejścia do granicy gdy $t \rightarrow 1$. Wielomiany symetryczne Schura, Jacka, oraz Macdonalda znalazły swoje zastosowania w wielu dziedzinach matematyki czy fizyki i ze względu na swoją interdyscyplinarną naturę pozostają w centrum zainteresowań współczesnej kombinatoryki algebricznej.

Jednym z klasycznych problemów teorii funkcji symetrycznych jest „znalezienie” współczynników rozkładu a_ρ wielomianu symetrycznego $f = \sum_\rho a_\rho s_\rho$ w ustalonej bazie $\{s_\rho\}$. W przypadku gdy $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}(q, t)}$ możemy pytać, czy współczynniki a_ρ , o których a priori wiadomo, że są funkcjami wymiernymi zmiennych q oraz t , nie są przypadkiem wielomianami czy też wielomianami o dodatnich współczynnikach całkowitych zmiennych q oraz t . W przypadku odpowiedzi pozytywnej na ostatnie pytanie poszukuje się zazwyczaj interpretacji kombinatorycznej współczynników a_ρ . Przykładowo, słynny wynik Haglunda, Haimana i Loehra orzeka, że współczynniki a_ρ rozkładu wielomianu Macdonalda $\tilde{H}_\lambda^{(q, t)}$ (jest to tzw. wersja transformowana klasycznej funkcji symetrycznej Macdonalda $J_\lambda^{(q, t)}$, której pełna definicja znajduje się w autoreferacie) w bazie jednomianów symetrycznych są wielomianami w q i t o dodatnich współczynnikach całkowitych. Co więcej, wielomiany te mają swoją interpretację kombinatoryczną – są one zdeterminowane przez pewne statystyki związane z odpowiednimi wypełnieniami diagramów Younga dla podziału λ . Na przestrzeni lat znaleziono szereg kombinatorycznych interpretacji rozmaitych funkcji symetrycznych, a część z nich w zwięzły i przystępny sposób opisana jest w autoreferacie Habilitanta. Niektóre z

¹Niniejsza definicja nie uwzględnia współczynników normalizacyjnych – pełną definicję można znaleźć w autoreferacie Habilitanta.

dostrzeżonych związków ciągle pozostają jednak tylko hipotezami, a jedną z nich jest właśnie Hipoteza-b.

Hipoteza-b. W latach 90-tych ubiegłego stulecia Goulden i Jackson, na bazie wielomianów symetrycznych Jacka, zdefiniowali następujące funkcje nieskończenie wielu zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$:

$$(1) \quad \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; t, \alpha) := \sum_{n \geq 1} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{x}) J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{y}) J_\lambda^{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\langle J_\lambda^{(\alpha)}, J_\lambda^{(\alpha)} \rangle_\alpha} t^n$$

oraz

$$(2) \quad \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; t, \alpha) := \alpha t \frac{\partial}{\partial t} \log \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}; t, \alpha)$$

i badali ich związki z kombinatoryką dopasowań w grafach oraz enumeratywnymi własnościami dwudzielnych map ukorzenionych, odpowiednio. *Ukorzeniona mapa* to graf wraz z wyróżnioną krawędzią i zorientowaną stroną tej krawędzi, zanurzony na powierzchni (zwartej, spójnej, dwuwymiarowej rozmaitości rzeczywistej, orientowalnej bądź nie) tak, że rozcina ją na ściągalne obszary, zwane ścianami. Dodatkowo, mapa jest *dwudzielna* jeżeli jej wierzchołki możemy pokolorować na dwa kolory, czarny i biały, stanowiące zbiory niezależne w tej mapie. Ponieważ funkcje potęgowe stanowią bazę wielomianów symetrycznych, możemy traktować funkcję ψ jako szereg formalny zmiennej t nad pierścieniem wielomianów zmiennych $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ o współczynnikach w $\mathbb{Q}(\alpha)$, gdzie $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots)$, zaś p_n, q_n, r_n są potęgowymi funkcjami symetrycznymi zmiennych $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, oraz $\mathbf{z}$. Przy takim podejściu, dla dowolnych podziałów λ, μ, ν liczby n możemy pytać o współczynnik przy $t^n p_\lambda q_\mu r_\nu$ w rozwinięciu funkcji $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha)$. Oznaczmy ten współczynnik przez $[t^n p_\lambda q_\mu r_\nu] \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha)$. Goulden i Jackson zauważyli, bez podania formalnego dowodu, że dla dowolnie wybranych podziałów n współczynniki te są wielomianami zmiennej α o współczynnikach całkowitych, które po podstawieniu $\alpha := \beta + 1$ zdają się mieć tylko dodatnie współczynniki (teraz jako wielomiany zmiennej β). Zauważmy, że wprost z definicji funkcji ψ wynika, że współczynniki te, które oznaczamy dalej przez $\psi_{\mu, \nu}^\lambda(\alpha) := [t^n p_\lambda q_\mu r_\nu] \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, \alpha)$ oraz $\psi_{\mu, \nu}^\lambda(\beta) := [t^n p_\lambda q_\mu r_\nu] \psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}; t, 1 + \beta)$, są funkcjami wymiernymi zmiennych α oraz β , odpowiednio. Niech $\mathcal{M}_{\mu, \nu}^\lambda$ będzie zbiorem wszystkich dwudzielnych map ukorzenionych o n krawędziach, o stopniach czarnych i białych wierzchołków zadanych przez partycje μ oraz ν , odpowiednio, oraz stopniach ścian zadanych partycją 2λ . Badania funkcji ψ skłoniły Gouldena i Jacksona do postawienia następującej hipotezy.

Hipoteza-b. Dla dowolnych podziałów λ, μ, ν liczby n zachodzi tożsamość

$$\psi_{\mu, \nu}^\lambda(\beta) = \sum_{M \in \mathcal{M}_{\mu, \nu}^\lambda} \beta^{\eta(M)},$$

gdzie $\eta(M)$ jest pewną liczbą całkowitą nieujemną, zwaną „statystyką orientowalności” mapy M , która jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy mapa M jest orientowalna.

Innymi słowy, hipoteza ta orzeka, że funkcja ψ jest funkcją tworzącą ukorzenionych map dwudzielnych, przy czym współczynnik $\psi_{\mu, \nu}^\lambda(\beta)$ przy $p_\lambda q_\mu r_\nu$ w rozwinięciu funkcji ψ jest funkcją tworzącą map o stopniach czarnych i białych wierzchołków oraz stopniach ścian zadanych partycjami μ, ν, λ , odpowiednio, ważoną względem pewnej statystyki η mierzącej orientowalność map. Warto tutaj wspomnieć, że pomimo iż Hipoteza-b postawiona jest tylko dla map dwudzielnych, jej ewentualna prawdziwość pozwalałaby otrzymać stosowne funkcje tworzące dla wszystkich map: każdą mapę, której wierzchołki kolorujemy na czarno, możemy przekształcić w sposób bijektywny w mapę dwudzielną poprzez położenie białego wierzchołka na każdej krawędzi.

Hipoteza-b, pomimo swoich dwudziestu kilku lat, pozostaje ciągle otwarta. Oczywiście, jest ona udowodniona dla pewnych szczególnych przypadków. Golden i Jackson udowodnili jej

prawdziwość dla wartości $\beta = 1$ oraz $\beta = 0$. Zauważmy, że dla takich podstawień $\sum_{M \in \mathcal{M}_{\mu, \nu}^{\lambda}} \beta^{\eta(M)}$ zlicza wszystkie mapy ($\beta = 1$) oraz wszystkie mapy orientowalne ($\beta = 0$) o charakterystyce λ, μ, ν . W kontekście niniejszej rozprawy warto również wspomnieć wynik La Croix z roku 2009, który dla pewnej szczególnej rodziny statystyk orientowalności η wykazał, że $\sum_{l(\lambda)=r} \psi_{\mu, (2^n)}^{\lambda}(\beta)$ jest funkcją tworzącą map dwudzielnych o r ścianach oraz stopniach czarnych i białych wierzchołków zadanych partycjami μ oraz $2^n = (2, \dots, 2)$.

Omówienie prac wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego. Głównym wynikiem pracy [A], wspólnej z Féray'em, jest udowodnienie **wielomianowości w Hipotezie-b**, tzn. wykazanie, że dla dowolnych podziałów λ, μ, ν liczby n funkcja wymierna $\psi_{\mu, \nu}^{\lambda}(\beta)$ jest wielomianem zmiennej β stopnia $2 + n - l(\lambda) - l(\mu) - l(\nu)$. Wynik ten ma charakter przełomowy i stanowi pierwszy ważny krok w kierunku znalezienia pełnego dowodu hipotezy-b. Punktem startowym dla pracy [A] była wcześniejsza praca Habilitanta i Féray'a, w której udowodniono wielomianowość funkcji $[t^n p_{\lambda} q_{\mu} r_{\nu}] \phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, t, \alpha)$, gdzie ϕ jest zdefiniowana równaniem (1). Oczywiście, aby dowieść wielomianowość $\psi_{\mu, \nu}^{\lambda}(\beta)$ wystarczy dowieść wielomianowości $\psi_{\mu, \nu}^{\lambda}(\alpha)$. Wykorzystując związek pomiędzy funkcjami ϕ oraz ψ , określony równaniem (2), autorzy pracy [A] dowodzą, że funkcja $\psi_{\mu, \nu}^{\lambda}(\alpha)$ nie ma biegunów innych niż w zerze. Aby udowodnić, że funkcja $\psi_{\mu, \nu}^{\lambda}(\alpha)$ nie ma bieguna w zerze, i w konsekwencji jej wielomianowość, autorzy rozważają tak zwane *kumulanty* wielomianów symetrycznych Jacka. Aby po krótkce wyjaśnić pojęcie kumulanty funkcji symetrycznych Jacka, wprowadźmy najpierw operator $\oplus$ w zbiorze wszystkich podziałów oraz w zbiorze funkcji symetrycznych $\Lambda_{\mathbb{Q}(\alpha)}$. Dla podziałów $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ oraz $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ połączmy $\mu \oplus \nu := (\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, \dots)$, zaś w zbiorze $\Lambda_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ połączmy $J_{\mu}^{\alpha} \oplus J_{\nu}^{\alpha} := J_{\mu \oplus \nu}^{\alpha}$ i rozszerzmy $\oplus$ na $\Lambda_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ w sposób liniowy po każdej ze współrzędnych. Okazuje się, że dość trudną algebrę $(\Lambda_{\mathbb{Q}(\alpha)}, \cdot)$ wygodnie jest czasem „aproskymować” prostszą algebrą $(\Lambda, \oplus)$, zaś kumulanty są wygodnym i użytecznym narzędziem do opisywania zależności między tymi algebrami. Ogólnie, dla wielomianów symetrycznych Jacka $J_{\lambda_1}^{(\alpha)}, J_{\lambda_2}^{(\alpha)}, \dots, J_{\lambda_r}^{(\alpha)}$ przyjmuje się

$$\kappa(J_{\lambda_1}^{(\alpha)}, J_{\lambda_2}^{(\alpha)}, \dots, J_{\lambda_r}^{(\alpha)}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}[r]} (-1)^{|\pi|-1} (|\pi| - 1)! \prod_{B \in \pi} J_B^{(\alpha)}, \quad \text{gdzie} \quad J_B^{(\alpha)} = J_{(\oplus_{i \in B} \lambda_i)}^{(\alpha)},$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich podziałach π zbioru $[r]$. Dla przykładu,

$$\kappa(J_{\lambda_1}^{(\alpha)}, J_{\lambda_2}^{(\alpha)}) = J_{\lambda_1 \oplus \lambda_2}^{(\alpha)} - J_{\lambda_1}^{(\alpha)} \cdot J_{\lambda_2}^{(\alpha)},$$

$$\kappa(J_{\lambda_1}^{(\alpha)}, J_{\lambda_2}^{(\alpha)}, J_{\lambda_3}^{(\alpha)}) = J_{\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3}^{(\alpha)} - J_{\lambda_1 \oplus \lambda_2}^{(\alpha)} \cdot J_{\lambda_3}^{(\alpha)} - J_{\lambda_1 \oplus \lambda_3}^{(\alpha)} \cdot J_{\lambda_2}^{(\alpha)} - J_{\lambda_2 \oplus \lambda_3}^{(\alpha)} \cdot J_{\lambda_1}^{(\alpha)} + 2J_{\lambda_1}^{(\alpha)} \cdot J_{\lambda_2}^{(\alpha)} \cdot J_{\lambda_3}^{(\alpha)}.$$

Pomimo tej dość technicznej definicji, badanie kumulantów w kontekście hipotezy-b okazało się być bardzo użyteczne (co staje się bezsporne w kontekście pracy [E], która nadaje interpretację kombinatoryczną kumulantom funkcji symetrycznych Macdonalda). W pierwszej kolejności autorzy pracy [A] wykazali, że funkcję ψ można przedstawić w postaci pewnej liniowej kombinacji kumulant funkcji Jacka. Dalej, autorzy dowodzą w sposób algebraiczny własności „silnej faktoryzacji” (zwanej też własnością „małych kumulant”) kumulant funkcji symetrycznych Jacka, która zapewnia, że współczynniki rozkładu a_{ρ} funkcji symetrycznej $k(J_{\lambda_1}^{(\alpha)}, J_{\lambda_2}^{(\alpha)}, \dots, J_{\lambda_r}^{(\alpha)})$ w bazie jednomianów symetrycznych są wielomianami w $\mathbb{Q}(\alpha)$ postaci $a_{\rho} = \alpha^{r-1} \cdot p_{\rho}(\alpha)$, gdzie $p_{\rho}(\alpha)$ jest wielomianem zmiennej α o współczynnikach całkowitych. Zauważmy, że interpretacja kombinatoryczna współczynników rozkładu wielomianów Jacka w bazie jednomianów symetrycznych, udowodniona przez Knopa i Sahiego, zapewnia tylko, że a_{ρ} są wielomianami o współczynnikach całkowitych zmiennej α . Kluczowa jest tutaj ta dodatkowa podzielność przez α^{r-1} , która w połączeniu z odpowiednim przedstawieniem ψ w postaci kombinacji liniowej kumulant funkcji Jacka, daje już wielomianowość $\psi_{\mu, \nu}^{\lambda}(\alpha)$.

Pokłosiem wyników pracy [A] jest samodzielna praca [B], w której Habilitant dowodzi Hipotezy-b w pewnych jej szczególnych przypadkach. Punktem wyjściowym, poza wielomianowością $\psi_{\mu,\nu}^\lambda(\beta)$ udowodnioną w pracy [A], jest wspomniana wcześniej praca La Croix, w której zdefiniowana jest pewna rodzina statystyk orientowalności dla map. Niech η będzie ustaloną statystyką z tej rodziny i niech $(H^\eta)_{\mu,\nu}^\lambda := \sum_{M \in \mathcal{M}_{\mu,\nu}^\lambda} \beta^{\eta(M)}$ oznacza funkcję tworzącą dla map o charakterystyce λ, μ, ν ważonych tą statystyką. W pierwszej kolejności Habilitant wykazuje, że pewne własności algebraiczne funkcji $\psi_{\mu,\nu}^\lambda$ pokrywają się z kombinatorycznymi własnościami funkcji $(H^\eta)_{\mu,\nu}^\lambda$ (poprzez pokazanie stosownych bijekcji pomiędzy mapami o określonych charakterystykach). Korzystając z tych zależności wykazuje równość $\sum_{\lambda \vdash n} \psi_{\mu,\nu}^\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} (H^\eta)_{\mu,\nu}^\lambda$, która oznacza, że $\sum_{\lambda \vdash n} \psi_{\mu,\nu}^\lambda$ jest istotnie funkcją tworzącą map dwudzielnych o stopniach czarnych i białych wierzchołków zadanych partycjami μ oraz ν ważonych statystyką η . Dalej dowodzi, uściślając statystykę η zaproponowaną przez La Croix, że w część najwyższego stopnia wielomianu $\sum_{\lambda \vdash n} \psi_{\mu,\nu}^\lambda$ wkład mają jedynie mapy dwudzielne, które są jednościenne (odpowiadają podziałowi $\lambda = (n)$) i nie mają tak zwanych „rączek”. Spostrzeżenie to pozwala wykazać, że dla dowolnych podziałów μ oraz ν oraz podziału $\lambda = (n)$ postulowana w hipotezie-b równość $\psi_{\mu,\nu}^{(n)}(\beta) = (H^\eta)^{(n)}_{\mu,\nu}(\beta)$, poza wiadomymi przypadkami $\beta = 0$ oraz $\beta = 1$, zachodzi także dla $\beta = -1$. Co więcej, współczynnik przy jednomianie najwyższego stopnia wielomianu $\psi_{\mu,\nu}^{(n)}(\beta)$ jest równy, z dokładnością do znaku, jego wartości w punkcie $\beta = -1$. Tym samym, wartość $\psi_{\mu,\nu}^{(n)}(-1)$ określa, z dokładnością do znaku, liczbę jednościennych map dwudzielnych bez rączek o stopniach czarnych i białych wierzchołków zadanych partycjami μ oraz ν . Wynik ten daje kolejną kombinatoryczną interpretację wielomianu $\psi_{\mu,\nu}^\lambda(\beta)$, poza znanymi już przypadkami $\beta = 0$ oraz $\beta = 1$, tym razem jednak w odniesieniu wyłącznie do map jednościennych. Ostatnim wynikiem pracy [B] jest dowód Hipotezy-b dla map jednościennych niskiego genusu.

Kolejna, znakomita praca [C], wspólna z Chapuy’em, stanowi istotny przełom w obszarze badań nad bijectywnymi własnościami map. Badania takie zapoczątkowane zostały przez Tutte’a w latach 60-tych ubiegłego stulecia, który badał własności strukturalne funkcji tworzących ukorzenionych map planarnych (zanurzonych na sferze) względem liczby krawędzi n . Wykazał on, między innymi, że map takich jest $\frac{2 \cdot 3^n (2n!)}{(n+2)! n!}$. Zauważmy, że liczba ta jest równa n -tej liczbie Catalana przemnożonej przez $\frac{2}{n+2} 3^n$. Wynik ten w oczywisty sposób skłaniał badaczy ku poszukiwaniu odpowiednio ważonej jawnej bijekcji pomiędzy mapami planarnymi o n krawędziach a n -wierzchołkowymi drzewami planarnymi, których każdy wierzchołek ma etykietę w zbiorze $\{-1, 0, +1\}$. Bijekcja taka w latach 80-tych została skonstruowana przez Coriego i Vauquelina. Kolejnym wyzwaniem w tej tematyce była próba rozszerzenia powyższego wyniku na powierzchnie o dowolnym genusie. Tym razem rolę drzew pełnić mają mapy jednościenne, będące analogami drzew w przypadku sfery. Pierwszy istotny wynik w tym obszarze uzyskał Schaeffer pod koniec lat 90-tych, który skonstruował takie bijekcje dla wszystkich powierzchni orientowalnych. Ponieważ wynik Schaeffera wyrażony jest w terminach dwudzielnych kwadrangulacji (map, w których każda ściana ma stopień 4) na powierzchni $\mathcal{S}$ o n ścianach, zauważmy najpierw prostą odpowiedniość pomiędzy takimi mapami a mapami na $\mathcal{S}$ o n krawędziach. Zaczynając od mapy na n krawędziach na powierzchni $\mathcal{S}$, wewnątrz każdej jej ściany wstawiamy nowy wierzchołek i łączymy go z wierzchołkami przyległymi do tej ściany, usuwając zarazem krawędzie oryginalnej mapy. Tak otrzymana mapa jest oczywiście dwudzielną kwadrangulacją na $\mathcal{S}$ o n ścianach. Wynik Schaeffera możemy wyrazić następująco: dla dowolnej powierzchni orientowalnej $\mathcal{S}$ istnieje jawna bijekcja pomiędzy dwudzielnymi kwadrangulacjami na $\mathcal{S}$ o n ścianach i wyróżnionym wierzchołku, a poetykietowanymi mapami jednościennymi na $\mathcal{S}$ o n krawędziach, w których etykiety odpowiadają odległościom od wyróżnionego wierzchołka kwadrangulacji. Konstrukcja Schaeffera jest konstrukcją lokalną, w której fragmenty mapy jednościennej konstruuje się na

podstawie każdej ściany kwadrangulacji z osobna, zaś jej globalną poprawność zapewnia orientowalność powierzchni $\mathcal{S}$. Kluczową rolę w dowodzie jej poprawności odgrywają tak zwane *dualne grafy eksploracji*, konstruowane równolegle z mapą, które zapewniają jej jednościenneść. Przez blisko 20 lat otwarte było pytanie, czy podobną konstrukcję można przeprowadzić na dowolnej powierzchni. Odpowiedź pozytywną znajdujemy w przełomowej pracy [C], a przedstawiona w niej konstrukcja zawiera konstrukcję Schaeffera jako szczególny przypadek. Oczywiście konstrukcja dualnego grafu eksploracji, na którym opiera się dowód poprawności całej konstrukcji, jest tutaj dużo bardziej pomysłowa i wyrafinowana, przy czym cała jej trudność wynika z braku globalnej orientacji powierzchni. Ten spektakularny wynik, połączony ze standardowymi metodami rozkładu map jednościennych na ścieżki Motzkina, pozwala badać własności enumeratywne map oraz własności map losowych na dowolnej powierzchni $\mathcal{S}$, co dotychczas było możliwe jedynie dla przypadku powierzchni orientowalnych. W szczególności, praca [C] podaje pierwszy czysto kombinatoryczny dowód, że liczba wszystkich map na powierzchni $\mathcal{S}$ jest rzędu $t(\mathcal{S})n^{\frac{-5\chi(\mathcal{S})}{4}}12^n$, gdzie $t(\mathcal{S})$ jest pewną stałą zależną od $\mathcal{S}$, zaś $\chi(\mathcal{S})$ jest charakterystyką Eulera powierzchni $\mathcal{S}$.

Dwie ostatnie samodzielne prace Habilitanta, [D] oraz [E], badają kumulanty wielomianów Macdonalda $\tilde{H}_{\lambda}^{(q,t)}$, stanowiąc tym samym naturalną kontynuację badań zapoczątkowanych w pracy [A]. Głównym wynikiem pracy [D] jest dowód hipotezy postawionej w pracy [A], że własność silnej faktoryzacji zachodzi również w szerszym kontekście wielomianów Macdonalda. Istotnie, praca [D] dowodzi, że współczynniki a_{ρ} rozkładu kumulanty wielomianów Macdonalda $k(\tilde{H}_{\lambda_1}^{(q,t)}, \dots, \tilde{H}_{\lambda_r}^{(q,t)})$, zdefiniowanej analogicznie jak kumulanta wielomianów Jacka, w bazie jednomianów symetrycznych $\{m_{\rho}\}_{\rho}$ są wielomianami postaci $(q-1)^{r-1} \cdot p_{\rho}(q, t)$, gdzie $p_{\rho}(q, t)$ są wielomianami zmiennych q oraz t o współczynnikach całkowitych. Podobnie, wspomniana wcześniej interpretacja kombinatoryczna wielomianów Macdonalda, autorstwa Haglunda, Haimana, i Loehra implikuje, że współczynniki te są wielomianami w q i t o współczynnikach całkowitych. Wynik ten, uzyskany metodami algebraicznymi, w szczególności dowodzi własności silnej faktoryzacji kumulant funkcji symetrycznych Jacka. Praca [D] pokazuje, że własność silnej faktoryzacji zachodzi także dla wielomianów interpolacyjnych Macdonalda. Praca ta stawia również ciekawą hipotezę, że współczynniki rozkładu kumulant Macdonalda w bazie wielomianów Schura są wielomianami w q i t o dodatnich współczynnikach całkowitych.

Ostatnia praca [E] stanowi klamrę dla wyników osiągniętych w pracach [A], [B] oraz [D]. Głównym wynikiem tej pracy jest kombinatoryczna interpretacja współczynników a_{ρ} rozkładu kumulant Macdonalda w bazie jednomianów symetrycznych. W szczególności, interpretacja ta zapewnia, że współczynniki a_{ρ} są wielomianami postaci $(q-1)^{r-1} \cdot p_{\rho}(q, t)$, gdzie $p_{\rho}(q, t)$ jest wielomianem zmiennych q i t o **dodatnich** współczynnikach całkowitych, wzmacniając tym samym wynik z pracy [D]. Wynik ten daje czysto kombinatoryczny dowód wielomianowości w Hipotezie-b, wykazanej w pracy [A] metodami algebraicznymi. W końcu, jest on mocną przesłanką, że badanie kumulant oraz ich interpretacji kombinatorycznych jest właściwą drogą w kontekście ewentualnego dowodu Hipotezy-b. Punktem startowym dla głównego wyniku pracy [E] jest omawiany już wcześniej wynik Haglunda, Haimana i Loehra z roku 2005, w którym podano interpretację kombinatoryczną współczynników rozkładu wielomianu Macdonalda $\tilde{H}_{\lambda}^{(q,t)}$ w bazie jednomianów symetrycznych w terminach pewnych statystyk związanych z wypełnieniami diagramu Younga dla podziału λ . Aby zinterpretować kombinatorycznie kumulantę $k(\tilde{H}_{\lambda_1}^{(q,t)}, \dots, \tilde{H}_{\lambda_r}^{(q,t)})$, na bazie wypełnień diagramów Younga dla podziałów $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, Habilitant tworzy pewien multigraf i dowodzi, że współczynniki rozkładu $k(\tilde{H}_{\lambda_1}^{(q,t)}, \dots, \tilde{H}_{\lambda_r}^{(q,t)})$ w bazie jednomianów symetrycznych można zinterpretować w terminach pewnych statystyk związanych z drzewami rozpinającymi skonstruowanego multigrafu. Interpretacja taka wiąże kumulanty

wielomianów Macdonalda z wielomianami Tutte'a oraz funkcjami tworzącymi funkcji parkujących dla skonstruowanego multigrafu.

Ocena wskazanego osiągnięcia habilitacyjnego

Prace wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego stanowią cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, czego wymaga ustawa o stopniach naukowych. Wszystkie prace cyklu są bardzo głębokie i wnoszą istotny wkład w rozwój badań nad Hipotezą-b oraz własnościami enumeratywnymi oraz bijektywnymi map. Wymienić tu należy w szczególności prace [A], [C] oraz [E]. Praca [A] dowodzi własności wielomianowości w Hipotezie-b, co stanowi pierwszy istotny krok w kierunku jej udowodnienia. Na uwagę zasługuje tutaj nowatorski sposób wykorzystania teorii kumulant, narzędzia wywodzącego się z dziedziny probabilistyki, po raz pierwszy w odniesieniu do wielomianów symetrycznych. Praca [C] konstruuje jawną bijekcję pomiędzy etykietowanymi mapami jednościennymi a dowolnymi mapami na dowolnej ustalonej powierzchni, rozwiązując tym samym jeden z kluczowych problemów bijektywnej kombinatoryki map, otwarty przez prawie dwadzieścia lat. Ten wynik ma charakter przełomowy, gdyż otwiera drogę do systematycznych badań własności map na dowolnej ustalonej powierzchni (nie tylko orientowalnej). Praca [E] pokazuje w końcu, że wielomianowość w Hipotezie-b można wykazać w sposób prawie czysto kombinatoryczny, poprzez nadanie interpretacji kombinatorycznej kumulantom wielomianów Macdonalda. Praca ta dowodzi głębokiej intuicji Habilitanta, który dostrzegł bardzo nieoczywiste związki pomiędzy kumulantami Macdonalda a wielomianami Tutte'a czy też funkcjami tworzącymi funkcji parkujących. Wszystkie prace świadczą o znakomitym warsztacie badawczym Habilitanta. W swojej pracy naukowej odwołuje się On często do wyników innych autorów, odpowiednio je rozszerzając czy też dostosowując do swoich potrzeb (część pracy [A], punkt startowy dla prac [B] oraz [C], część pracy [E]). Niniejszy cykl pokazuje w końcu ogromną determinację Habilitanta w kierunku lepszego zrozumienia różnych aspektów Hipotezy-b, które mogłyby się przyczynić do jej ewentualnego dowodu.

Prace [B, D, E] są pracami samodzielnymi, prace [A] oraz [C] mają jednego współautora. Z oświadczeń wnioskodawcy oraz współautorów wynika, że Habilitant miał istotny wkład w powstanie obu tych prac. Wszystkie prace [A]-[E] zostały opublikowane w czasopismach matematycznych o uznanej renomie (*Transactions of the American Mathematical Society*, *Electronic Journal of Combinatorics*, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, *Journal of Algebraic Combinatorics*, *European Journal of Combinatorics*). Doszukałem się 26 cytowań (16 bez autocytowań) prac [A]-[E] w bazie *Web of Science*, co jest wynikiem bardzo dobrym, zważywszy na to, że prawie wszystkie z nich zostały opublikowane w przeciągu czterech ostatnich lat.

Uważam, że przedstawione osiągnięcie naukowe spełnia wymagania stawiane „rozprawom habilitacyjnym” i bez wątpienia stanowi podstawę do nadania stopnia doktora habilitowanego.

Ocena aktywności naukowej Habilitanta

Oprócz prac naukowych [A]-[E] Habilitant wykazał dorobek naukowy składający się z 13 innych prac znajdujących się na liście MNiSW. Zostały one opublikowane w bardzo dobrych czasopismach naukowych takich jak *Advances in Mathematics*, *Duke Mathematical Journal*, *Probability Theory and Related Fields*, *Journal of Combinatorial Theory Series A* (x2), czy też *Journal of Algebra*. Zdecydowana większość prac Habilitanta stoi na bardzo wysokim poziomie naukowym i lokuje się w tematyce bliskiej rozprawie habilitacyjnej, dotyczącej kombinatorycznych aspektów teorii funkcji symetrycznych, ale też jej zastosowań w probabilistyce oraz teorii reprezentacji. Należy podkreślić duży wpływ prac Habilitanta na badania innych naukowców zajmujących się podobną problematyką, o czym świadczą bardzo dobre dane bibliometryczne Habilitanta. Baza *Web of Science* odnotowuje 77 cytowań jego prac, spośród których 60 nie jest autocytowaniami.

Habilitant swoje wyniki prezentował na szesnastu międzynarodowych konferencjach, w tym dziewięciu na zaproszenie. Ponadto wygłosił On szereg wykładów na zaproszenie na seminariach w kraju i za granicą (*Królewski Instytut Technologiczny w Sztokholmie, Université Paris Diderot, École Polytechnique, Uniwersytet w Zürychu*). Odbył też szereg wizyt naukowych w takich jednostkach naukowych jak *Université Paris Diderot, Uniwersytet w Zürychu* czy też *Uniwersytet Kalifornijski*. Warto też dodać, że Habilitant wcześniej zaangażował się w opiekę naukową nad doktorantami: był promotorem pomocniczym w jednym zakończonym już przewodzie doktorskim, obecnie zaś pod jego opieką przygotowywana jest kolejna rozprawa doktorska.

Wysoka aktywność naukowa Habilitanta została nagrodzona przyznanymi grantami na prowadzone przez niego badania. Habilitant był kierownikiem projektów *Preludium* oraz *Fuga* finansowanych przez *Narodowe Centrum Nauki*. Aktualnie jako kierownik prowadzi prace badawcze w ramach grantu *Sonata* finansowanego przez *Narodowe Centrum Nauki*.

Habilitant realizował swoje badania na wielu uczelniach, w tym na jednej uczelni zagranicznej. Studia doktoranckie odbywał na *Uniwersytecie Wrocławskim*. Po obronie doktoratu w latach 2013-2015 pracował na stanowisku postdoka na *Université Paris Diderot* ufundowanym przez francuską *Agence Nationale de la Recherche* w ramach grantu *Cartaplus*. Następnie w latach 2015-2018 pracował na *Uniwersytecie Poznańskim* na stanowisku badawczym adiunkta, finansowanym w ramach grantu *Fuga* przez *Narodowe Centrum Nauki*. Od roku 2018 Habilitant pracuje w *Instytucie Matematycznym PAN*.

Na koniec warto podkreślić zaangażowanie Habilitanta na rzecz popularyzacji nauki oraz jego działalność organizacyjną. W latach 2006-2013, we współpracy z Uniwersytetem Wrocławskim, wygłosił on cykl wykładów oraz prowadził kółko matematyczne dla uzdolnionych licealistów przygotowujących się do startu w Olimpiadzie Matematycznej. W latach 2016 i 2017 prowadził wykłady popularno-naukowe w ramach *Festiwalu Nauki, Spotkań z Matematyką, oraz Potęgi Matematyki* organizowanych przez *Poznańską Fundację Matematyczną*. Ponadto, w latach 2014-2015 organizował *Seminarium kombinatoryki analitycznej, algebraicznej i enumeratywnej*, które odbywało się na *Université Paris Diderot*. Obecnie jest jednym ze współorganizatorów, we współpracy z matematykami z Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz Akademii Górniczo Hutniczej, cyklu seminariów *Kraków Combinatorics Seminar*.

Konkluzja

Wnioskodawca wykazał się osiągnięciami naukowymi stanowiącymi istotny wkład w rozwój dyscypliny oraz istotną aktywnością naukową, które czynią zadość wymaganiom Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. **Rekomenduję nadanie doktorowi Maciejowi Dołędze stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie Nauk Ścisłych i Przyrodniczych w dyscyplinie Matematyka.** Uwzględniając wagę, oryginalność oraz głębię uzyskanych przez niego wyników, wnioskuję także o **wyróżnienie** jego rozprawy.

Tomen Kuwacz