Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 20 lipca 2021

Recenzja rozprawy doktorskiej
Ergodic properties of certain iterated function systems arising in partially hyperbolic dynamics
mgra Klaudiusza Czudka

Wstęp. Recenzowana rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu własności stochastycznych procesów Markowa pochodzących od iterowanych układów funkcyjnych. Podstawowym obiektem badań są tu iterowane układy funkcyjne generowane przez homeomorfizmy odcinka $f_1, \ldots, f_m : [0,1] \to [0,1]$, które na brzegu są klasy C^1 z niezerową pochodną. Iterowany układ funkcyjny opisuje dynamikę orbit $(f_{\omega_n} \circ \ldots \circ f_{\omega_1} x)_{n \geqslant 1}$ startujących z dowolnego punktu $x \in [0,1]$ przekształcanego przez homeomorfizmy $f_1, \ldots, f_m$, przy czym o wyborze przekształcającego homeomorfizm decyduje ciąg sterujący $\omega = (\omega_n)_{n \geqslant 1} \in \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$. Kolejne pozycje orbit opisuje również ciąg odwzorowań $\{X_n : \Omega \to [0,1] : n \geqslant 1\}$, gdzie $\Omega = [0,1] \times \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ oraz

$$X_n(x, \omega) = f_{\omega_n} \circ \ldots \circ f_{\omega_1} x.$$

Jeśli na Ω rozważymy miarę probabilistyczną, która jest produktem dowolnej miary probabilistycznej μ na $[0,1]$ oraz miary Bernoulliego na $\{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ wyznaczonej przez dowolny wektor probabilistyczny $(p_1, \ldots, p_m)$, to ciąg $(X_n)_{n \geqslant 1}$ staje się jednorodnym procesem stochastycznym Markowa. W przypadku, gdy proces jest stacjonarny, to miarę μ, określającą startowy rozkład prawdopodobieństwa, nazywamy również miarą *stacjonarną*. Rozważa się również ogólniejsze miary, w których wektory probabilistyczne $(p_1(x), \ldots, p_m(x))$ zależą od aktualnego położenia punktu na $[0,1]$. Wówczas wygenerowany proces jest również jednorodny Markowa.

Iterowane układy funkcyjne od lat 80-tych ubiegłego wieku pozostają tematem badawczym intensywnie studiowanym w międzynarodowym środowisku matematycznym, ze względu na urodę otrzymywanych rezultatów, jak i aspekt popularyzacyjny tematu fraktali. Podstawowe pytania dotyczą istnienia i wymiarów fraktalnych atraktorów iterowanych układów funkcyjnych. Jednym z podstawowych narzędzi badawczych są tu miary, m.in. miary stacjonarne oraz ich wymiary fraktalne. Innym kierunkiem badań, w który wpisuje się omawiana rozprawa, są własności stochastyczne iterowanego układu funkcyjnego, a dokładniej stowarzyszonego z nim procesu. Główne stawiane pytania dotyczą tu jedyności miary stacjonarnej, prawa wielkich liczb, centralnego twierdzenia granicznego, czy prawa iterowanych logarytmów. Jest to bardzo ciekawa i współcześnie rozwijana tematyka badań.

Własności iterowanych układów funkcyjnych rozpatrywanych z rozprawie, w dużej mierze, zależą od wartości *średnich wykładników Lyapunova* w krańcach przedziału, tzn.

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(0), \quad \Lambda_1 = \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(1).$$

Jeśli $\Lambda_0 < 0$, $\Lambda_1 < 0$ lub $\Lambda_0 < 0$, $\Lambda_1 > 0$ lub $\Lambda_0 > 0$, $\Lambda_1 < 0$, dynamika układu jest dość prosta. W uproszczeniu, jeden lub oba krańce są atraktorami układu.

W rozprawie badany jest najciekawszy przypadek, gdy $\Lambda_0 > 0$, $\Lambda_1 > 0$. Wówczas należy spodziewać się bardzo chaotycznego zachowania układu. To oczekiwanie jest potwierdzane w rozprawie poprzez dowodzenie prawa wielkich liczb, centralnego twierdzenia granicznego, itp., przy różnych dodatkowych założeniach na układ, zarówno dla procesu $(X_n)_{n\geqslant 1}$, jak i dla procesów $(X_n^x)_{n\geqslant 1}$ startujących z dowolnego $x \in (0,1)$ $(X_n^x(\omega) := X_n(x,\omega))$. Głównym narzędziem w badaniu stochastycznych własności procesów Markowa są dwa operatory: operator Markowa $P : M([0,1]) \to M([0,1])$ opisujący transformację miar w każdym kroku oraz jego operator pre-dualny $U : C([0,1]) \to C([0,1])$, który jest postaci

$$U(\varphi)(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \varphi(f_i(x)).$$

Główne rezultaty rozprawy dotyczą asymptotycznych własności iteracji operatora U. One implikują, korzystając z klasycznych rezultatów granicznych, prawa wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne, czy prawo iterowanego logarytmu. Wszystkie rozważane w rozprawie zagadnienia oraz wypracowane techniki są naturalne i bardzo interesujące. Część z zaprezentowanych w rozprawie wyników została już opublikowana w bardzo dobrych czasopismach: Israel Journal of Mathematics i Nonlinearity.

Omówienie rezultatów. Rozprawę rozpoczyna krótki rozdział wstępny, który w intencji autora zawiera motywacje prowadzonych badań. Moim zdaniem przedstawione motywacje, związane z dynamiką hiperboliczną, są raczej sztuczne i nieprzekonywujące. Badanie tego typu iterowanych układów funkcyjnych i ich stochastycznych własności broni się samo przez się i nie potrzebuje kwiecistych uzasadnień. Kolejną dużą wadą tego rozdziału jest brak precyzyjnego przedstawienia głównych wyników rozprawy. To jest jest chyba cel rozdziału wstępnego.

W rozdziale 2 autor przedstawia kompendium wiedzy na temat przypadków $\Lambda_0 < 0$, $\Lambda_1 < 0$ oraz $\Lambda_0 < 0$, $\Lambda_1 > 0$ oraz $\Lambda_0 > 0$, $\Lambda_1 < 0$. Ta część, pochodząca od innych autorów, jest przedstawiona z dowodami w sposób przejrzysty i pozwalający wdrożyć się czytelnikowi w technikalia, które są rozwinięte w dalszych rozdziałach rozprawy. Ponadto, w tym rozdziale wyjaśniona jest kwestia jedyności i stabilności miary stacjonarnej w przypadku $\Lambda_0 > 0$, $\Lambda_1 > 0$. Na zakończenie autor cytuje dwa najważniejsze obce rezultaty, z których później korzysta:

- Theorem 2.4, mówiące o ujemności oczekiwanego średniego wykładnika Lyapunova w przypadku, gdy homeomorfizmy $f_1, \dots, f_m$ są dodatkowo klasy C^2 i $\Lambda_0 > 0$, $\Lambda_1 > 0$, oraz
- Theorem 2.5, mówiące o istnieniu przedziałów, których prawie wszystkie orbity zanikają wykładniczo.

Rozdział 2 jest napisany rozsądnie i przekonywująco, ale też zawiera pewne braki. Nie znalazłem w nim wprowadzenia podstawowych pojęć i narzędzi niezbędnych do zrozumienia technik zastosowanych do udowodnienia rezultatów rozprawy. Tutaj rozprawa przypomina tekst napisany dla specjalistów, którzy bardzo dobrze orientują w standardowym podejściu i interesują się tylko nowinkami technicznymi. To nie jest przypadek piszącego recenzję. W szczególności kłopotliwym jest brak precyzyjnych definicji podstawowych pojęć używanych przez autora. Czytający często musi się sam ich domyślać.

W kolejnych trzech kluczowych rozdziałach autor dowodzi główne rezultaty rozprawy dotyczące przypadku $\Lambda_0 > 0$, $\Lambda_1 > 0$.

Rozdział 3 jest poświęcony sytuacji, w której homeomorfizmy $f_1, \ldots, f_m$ są dodatkowo klasy C^2. Wówczas najważniejszy rezultat rozdziału, Theorem 3.1, mówi, że $\|U^n\varphi\|_{L^2(\mu)}$ zanika wykładniczo dla dowolnej funkcji Lipschitza $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ o całce zero. Miara μ jest tu jedyną miarą stacjonarną. Dowód tego rezultatu zajmuje prawie cały 22 stronicowy rozdział 3. Dowód jest niezwykle skomplikowany, wieloetapowy i techniczny. Wymagał on od autora świetnego przygotowania z zakresu układów dynamicznych i probabilistyki oraz niezwykłej pomysłowości. Główne argumenty dowodu opierają się na wspomnianym Theorem 2.4. Wykładniczy zanik w Theorem 3.1 może być interpretowany jako wykładnicze mieszanie, co stanowi interesujący rezultat z punktu widzenia układów dynamicznych, ale ważniejsze są tu konsekwencje stochastyczne. Rozdział 3 kończy seria wniosków, w której autor dedukuje centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu oraz funkcjonalne centralne twierdzenie graniczne dla procesu $(X_n)_{n\geqslant 1}$ korzystając z Theorem 3.1 oraz klasycznych rezultatów na temat twierdzeń granicznych.

Rozdział 4 jest poświęcony sytuacji, w której na homeomorfizmy $f_1, \ldots, f_m$ nie narzuca się dodatkowej gładkości. Wówczas najważniejszy rezultat rozdziału, Theorem 4.1, mówi, że

$$\|\sum_{i=1}^{n} U^i\varphi\|_{L^2(\mu)} = O(n^{3/8}).$$

Jest to wynik słabszy niż wykładniczy zanik uzyskany w rozdziale 3, ale wystarczający aby udowodnić centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu oraz funkcjonalne centralne twierdzenie graniczne dla procesu $(X_n)_{n\geqslant 1}$. Tym razem należy skorzystać z klasycznych rezultatów Maxwella-Woodroofe'a. Argumenty użyte w dowodzie Theorem 4.1 są inne niż w rozdziale 3 i korzystają ze wspomnianego wcześniej Theorem 2.5. Sprawność techniczna i pomysłowość w przeprowadzeniu dowodu ponownie robią duże wrażenie. Co ciekawe, pomimo słabszych założeń, techniki wypracowane w rozdziale 4 pozwalają na udowodnienie centralnego twierdzenia granicznego również dla procesów $(X_n^x)_{n\geqslant 1}$ startujących z dowolnego punktu $x \in (0,1)$.

W rozdziale 5 autor skupia się na sytuacji, w której wektory probabilistyczne $(p_1(x), \ldots, p_m(x))$ zależą od położenia punktu. Wówczas ogólna analiza układu wydaje się niezmiernie trudna. Stąd autor koncentruje się na bardzo konkretnej klasie iterowanych układów funkcyjnych, który tworzą dwa kawałkami (na dwóch przedziałach) liniowe homeomorfizmy f_1, f_2 wzajemnie symetryczne. Ta klasa układów była badana przez Alsedę i Misiurewicz. Celem rozdziału 5 jest udowodnienie jedyności i stabilności miary stacjonarnej oraz prawa wielkich liczb. W założeniach wektory probabilistyczne $(p_1(x), p_2(x))$ zależą w sposób ciągły od $x \in [0,1]$, ale dodatkowo spełniają też pewien warunek typu Diniego, który naturalnie pojawia się w dowodzie. Tym razem autor w dowodzie używa istotnie liniowości homeomorfizmów oraz triku couplingowego.

Rozprawę kończy dodatek zawierający dowód Theorem 2.4, który był istotnie wykorzystywany w rozdziale 3.

Ocena rozprawy. Wszystkie rezultaty uzyskane przez autora w rozdziałach 3, 4 i 5 stanowią spójne tematycznie opracowanie, które rozwiązuje szereg ważnych, naturalnych i trudnych problemów dotyczących własności stochastycznych iterowanych układów funkcyjnych na odcinku. Rozwinięte przez niego narzędzia imponują różnorodnością i głębią rozumowań. Jeśli miałbym przyznawać notę za wartość techniczną (merytoryczną) to recenzowana rozprawa otrzymałaby jedną z najwyższych not.

Sprawa skomplikowałaby się w przypadku noty za wartość artystyczną (sposób prezentacji materiału). Całe szczęście ustawodawca nie wymaga od recenzenta takiej czynności. Mimo wszystko pozwolę sobie na kilka krytycznych uwag. Po pierwsze tytuł rozprawy nie odzwierciedla uzyskanych w niej wyników. Wstęp jest napisany bardzo chaotycznie i nie umieszcza rezultatów rozprawy pośród wyników do tej pory uzyskanych przez środowisko matematyczne. Przedstawiona we wstępie motywacja, o czym już wcześniej pisałem, wydaj się być naciągana i nieco sztuczna. Brak we wstępie sformułowań głównych rezultatów. W rozdziale wprowadzającym podstawowe pojęcia brakuje definicji głównych obiektów badań i w wielu przypadkach precyzyjnych sformułowań obcych twierdzeń, z których autor korzysta. Ta uwaga odnosi się również do kolejnych rozdziałów. Główna część rozprawy (rozdziały 3, 4 i 5) jest również napisane bez dbałości o to czy czytelnik zrozumie dowody. To prawda, że rozumowania przedstawione w rozprawie są często wielopiętrowe i skomplikowane, ale właśnie w doktoracie można wiele zawiłych kwestii wytłumaczyć nie troszcząc się o długość tekstu. Niestety w przypadku recenzowanego doktoratu łatwiej mi było zrozumieć pewne kwestie przeglądając wcześniej opublikowane prace niż tekst rozprawy. Nawet sposób numeracji rezultatów utrudnia czytanie rozprawy. Znajdowanie w tak długim tekście konkretnego lematu, czy twierdzenia jest bardzo uciążliwe.

Przytoczone tu krytyczne komentarze nie wpływają jednak istotnie na moją ogólną bardzo pozytywną ocenę rozprawy, której poziom matematyczny uważam za bardzo wysoki.

Podsumowanie. W moim przekonaniu rozprawa mgr. Klaudiusza Czudka pt. „Ergodic properties of certain iterated function systems arising in partially hyperbolic dynamics" spełnia z nadmiarem ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Uzyskane przez mgr. Klaudiusza Czudka wyniki świadczą o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu matematycznego i umiejętności rozwiązywania problemów z pogranicza układów dynamicznych i procesów stochastycznych.

Krzysztof Frączek