UNIWERSYTET WARSZAWSKI

UW MIM

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki
dr hab. Krzysztof Barański, prof. UW

Warszawa, 26.06.2021

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Klaudiusza Czudka pt. *Ergodic properties of certain iterated function systems arising in partially hyperbolic dynamics*

Rozprawa doktorska mgr. Klaudiusza Czudka, zredagowana w języku angielskim, została napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Tomasza Szarka. Tematem rozprawy są własności ergodyczne pewnych losowych układów homeomorfizmów odcinka. Dokładniej, rozpatrujemy tu skończoną rodzinę rosnących homeomorfizmów $f_1, \ldots, f_m$ otwartego odcinka $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, które stosujemy (wielokrotnie) w sposób losowy z prawdopodobieństwami, odpowiednio, $p_1, \ldots, p_m$, gdzie $(p_1, \ldots, p_m)$ jest danym wektorem probabilistycznym (w ostatnim rozdziale rozprawy rozpatruje się ogólniejszą sytuację, gdy prawdopodobieństwa $p_1, \ldots, p_m$ nie są stałe, lecz zależą od punktu $x \in (0, 1)$). W ujęciu probabilistycznym, proces taki jest opisany przez łańcuch Markowa o wartościach w $(0, 1)$ i prawdopodobieństwie przejścia $p(x, dy) = \sum_{i=1}^{m} p_i \delta_{f_i(x)}(dy)$, gdzie δ_z oznacza miarę Diraca w punkcie z. Natomiast w ujęciu dynamicznym proces ten jest modelowany przez iterowanie skośnego produktu postaci $F\colon \Omega \times (0, 1) \to \Omega \times (0, 1)$, $F(\omega, x) = (\theta(\omega), f_{\omega_1}(x))$, gdzie θ jest przesunięciem w lewo na przestrzeni $\Omega = \{1, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}$ ciągów $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ o wartościach w $\{1, \ldots, m\}$, z miarą produktową Bernoulliego $\mathbb{P} = \prod_{\mathbb{N}} \nu$, gdzie ν jest miarą probabilistyczną na $\{1, \ldots, m\}$ o rozkładzie wyznaczonym przez $(p_1, \ldots, p_m)$. W rozprawie analizuje się wyżej opisane układy przy użyciu zarówno podejścia probabilistycznego, jak i dynamicznego.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów oraz dodatku zawierającego dowód twierdzenia o ujemności średniego wykładnika Lapunowa dla rozpatrywanych układów. Rozdział 1 zawiera wprowadzenie dotyczące iterowanych układów funkcyjnych i gładkich układów dynamicznych oraz przedstawia wyniki pochodzące z kilku prac dotyczących skośnych produktów omawianego typu, m.in. artykułów Kana [Kan94] oraz Bonifant i Milnora [BM08] opisujących układy z dwoma atraktorami o przemieszanych (ang. *intermingled*) basenach przyciągania, a także artykułu Alsedy i Misiurewicza [AM14] o układach złożonych z dwóch kawałkami liniowych homeomorfizmów odcinka.

Rozdział 2 opisuje układy omawiane w rozprawie i przedstawia zebrane wyniki dotyczące ich

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
e-mail: baranski@mimuw.edu.pl

własności, uzyskane w pracach innych autorów. Ogólnie, w rozprawie analizuje się losowe układy homeomorfizmów odcinka przy następujących założeniach:

(A1) dla każdego $x \in (0,1)$ istnieją $i, j \in \{1, \dots, m\}$ takie, że $f_i(x) < x < f_j(x)$,

(A2) każde przekształcenie f_i przedłuża się do homeomorfizmu domkniętego odcinka $[0,1]$ mającego niezerowe pochodne w obu końcach odcinka.

W części rozprawy zakłada się dodatkowo, że f_i są dyfeomorfizmami klasy C^2.

Przy założeniu (A2) można zdefiniować wykładniki Lapunowa w końcach odcinka przez

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(0), \qquad \Lambda_1 = \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(1).$$

W dalszej części rozdziału 2 przedstawione są wyniki pochodzące z prac Gharaei i Homburga [GH17] oraz Szarka i Zdunik [SZ16], dotyczące zachowania omawianych układów w zależności od dodatniości lub ujemności Λ_0, Λ_1. Przypadek rozpatrywany w dalszej części rozprawy to $\Lambda_0, \Lambda_1 > 0$. Z w/w prac wiadomo, że istnieje wtedy (jedyna) miara stacjonarna μ na $(0,1)$ (spełniająca $\mu = \sum_{i=1}^{m} p_i \, \mu \circ f_i^{-1}$), a dla ustalonych dwóch punktów $x, y \in (0,1)$ odległość między ich obrazami przy kolejnych iteracjach $f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1}$ dąży do 0 dla $\mathbb{P}$-prawie wszystkich ω (zjawisko *synchronizacji*). Rozdział 2 przytacza dowody tych faktów, przy czym dowód twierdzenia, że dla tych układów średni wykładnik Lapunowa $\Lambda = \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} p_i \log f_i'(x) d\mu(x)$ jest ujemny (naszkicowany we wspomnianej wyżej pracy Gharaei i Homburga [GH17]), został szczegółowo przeprowadzony przez Autora rozprawy w dodatku A.

Rozdział 3 zawiera jeden z głównych wyników rozprawy. Mówi on, że jeśli f_i są dyfeomorfizmami klasy C^2 oraz spełniają założenia (A1) i $\Lambda_0, \Lambda_1 > 0$, to istnieją stałe $C > 0$, $q < 1$ takie, że dla sprzężonego operatora Markowa

$$U\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \varphi(f_i(x)),$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\|U^n \varphi\|_{L^2(\mu)} \leq Cq^n$$

dla każdej funkcji lipschitzowskiej φ o całce zero. W tym celu dowodzi się najpierw, że $\mathbb{E}|Z_n^x - Z_n^y| \leq cq^n$ dla $x, y \in (0,1)$, gdzie Z_n^z jest stanem procesu startującego z z po czasie n. Są to samodzielne, niepublikowane wyniki Autora. Dowód liczy kilkanaście stron, jest skomplikowany technicznie i polega w głównej mierze na precyzyjnych szacowaniach rozkładu kolejnych czasów powrotów trajektorii do odcinków postaci $[a, 1-a]$, $a \in (0,1)$ oraz odległości między trajektoriami dwóch danych punktów. Jako wniosek uzyskuje się centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu i zasadę niezmienniczości Donskera (zbieżność według rozkładu do procesu Wienera) dla rozpatrywanych procesów.

Rozdział 4 opisuje wyniki z dwóch opublikowanych prac Autora: jednej – wspólnej z Tomaszem Szarkiem [CS20b] oraz drugiej – wspólnej z Hanną Wojewódką-Ściążką i Tomaszem Szarkiem [CWSS20]. Udowodniono, że jeśli f_i są homeomorfizmami spełniającymi założenia (A1) i (A2) oraz $\Lambda_0, \Lambda_1 > 0$, to istnieje $C > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} U^k \varphi \right\|_{L^2(\mu)} \leq C n^{3/8}$$

dla każdej funkcji lipschitzowskiej φ o całce zero. Podobnie jak poprzednio, jako wniosek uzyskuje się centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu i zasadę niezmienniczości dla rozpatrywanych procesów.

W rozdziale 5 rozpatruje się układ dwóch kawałkami liniowych homeomorfizmów odcinka badanych we wspomnianej wyżej pracy Alsedy i Misiurewicza [AM14], przy czym zakłada się, że prawdopodobieństwa $p_1, \ldots, p_m$ nie są stałe, lecz zależą (w sposób dostatecznie regularny) od punktu $x \in (0, 1)$). Przy założeniu $\Lambda_0, \Lambda_1 > 0$, dla pewnego zakresu parametrów układu uzyskuje się istnienie i jedyność miary stacjonarnej na $(0, 1)$ oraz asymptotyczną stabilność procesu. Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w samodzielnej pracy Autora [Czu20].

Podsumowując, wyniki zaprezentowane w rozprawie pochodzą z nieopublikowanej jeszcze pracy Autora (rozdział 3), dwóch opublikowanych prac współautorskich (rozdział 4) i samodzielnej opublikowanej pracy (rozdział 3). Należy zaznaczyć, że wszystkie opublikowane prace ukazały się w renomowanych czasopismach (*Israel Journal of Mathematics*, *Nonlinearity*). Wobec braku załączonych oświadczeń współautorskich domniemuję, że wkład Autora w powstanie wspólnych prac był co najmniej proporcjonalny do liczby współautorów. Znaczący wkład Autora w uzyskanie wyników rozprawy nie ulega więc wątpliwości.

Pod względem merytorycznym wyniki zaprezentowane w rozprawie robią bardzo dobre wrażenie. Stanowią spójny tematycznie zestaw twierdzeń dotyczących zagadnień istnienia i jedyności miary stacjonarnej oraz stopnia chaotyczności rozpatrywanych losowych układów przekształceń odcinka, opisanego przez własności dualnego operatora Markowa. Tematyka ta jest przedmiotem dużego zainteresowania wielu matematyków zajmujących się teorią ergodyczną układów dynamicznych. Klasyczne obszary badań w tej dziedzinie, to działania grup gładkich dyfeomorfizmów na okręgu oraz własności układów przekształceń rozszerzających na odcinku. W przypadku półgrup homeomorfizmów teoria ta dopiero zaczyna się rozwijać. W porównaniu z wymienionymi przypadkami, udowodnienie podstawowych wła-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
e-mail: baranski@mimuw.edu.pl

sności miar niezmienniczych/stacjonarnych napotyka tu na zwiększone trudności. Uzyskane wyniki bedą niewątpliwie interesujące dla badaczy pracujących w tej dziedzinie. Szczególnie ciekawe są zagadnienia związane z różnymi rodzajami synchronizacji, występującej w tych układach. Autor rozprawy wykazał się bardzo dobrą znajomością metod probabilistycznych i dynamicznych używanych w badaniach omawianej problematyki oraz dużą biegłością techniczną.

Pewne uwagi krytyczne można odnieść do układu i sposobu prezentacji wyników rozprawy. Da się zauważyć pewien brak uporządkowania, powtórzenia niektórych fragmentów dowodów i niejednolity system oznaczeń, który często utrudnia lekturę. Wydaje się, że w dużej mierze jest to spowodowane, o czym pisze w przedmowie sam Autor, dość pospiesznym dołączeniem do rozprawy rozdziału 3 i niedostatecznym wkomponowaniem go w całość tekstu. Można też zauważyć pewne nieścisłości w sformułowaniach wyników i inne drobne niedociągnięcia. Niektóre z nich wymieniam poniżej.

- Dwie nienumerowane definicje na stronie 8 zawierają nieścisłości (m.in. brak założeń o rozmaitości M i przekształceniu f, nieprawidłowo napisany warunek ściągania i rozciągania w pierwszej definicji).
- W twierdzeniu 1.3 zamiast „stationary measure” powinno być „invariant measure”. W punkcie (III) brakuje numeru iteracji F. W wielu miejscach zamiast $F^{\pm n}$ powinna występować jego druga współrzędna.
- Oprócz pracy [GH17] Autor powinien również uwzględnić wcześniejszą pracę tych autorów:

  Masoumeh Gharaei, Ale Jan Homburg, *Skew products of interval maps over subshifts*, J. Difference Equ. Appl. 22 (2016), no. 7, 941–958,

  w której udowodniono m.in. istnienie miary stacjonarnej μ spełniającej $\mu((0,1)) = 1$ dla rozważanych układów (por. stwierdzenie 3.1).
- Twierdzenia 2.3–2.4 cytują odpowiednie wyniki z pracy [GH17], gdzie są one sformułowane przy mocniejszych założeniach (brak punktów stałych przekształceń f_i w $(0,1)$) niż (A1). Należałoby zauważyć, że twierdzenie 2.4 jest dowiedzione przy słabszych założeniach w dodatku A i odnieść się do wniosku 2.1.
- We wniosku 2.1 brak jest zależności od ω.
- W twierdzeniach 2.3–2.4, 3.1–3.2 i wnioskach 3.2–3.4 założenie (A2) jest niepotrzebne.
- Tezę twierdzenia 3.2 można by sformułować w zgrabniejszej formie: dla $x, y \in (0,1)$ istnieją $c > 0$, $q < 1$ takie, że $\mathbb{E}|Z_n^x - Z_n^y| \leq cq^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
e-mail: baranski@mimuw.edu.pl

- W definicji $\mathcal{P}_{M,\alpha}$ na stronie 32 brakuje definicji $\mathcal{M}(0,1)$.
- W lemacie 3.1 powinno być $\bar{q_2} < 1$.
- Na stronie 37 w linii 7, zamiast „using Proposition 3.1” powinno być „using (3.2)”.

Te krytyczne uwagi nie zmieniają mojej pozytywnej oceny rozprawy, w której doceniam przede wszystkim wysoką wartość merytoryczną uzyskanych wyników.

W konkluzji stwierdzam, że przedstawiana rozprawa spełnia zarówno ustawowe, jak i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Barański

dr hab. Krzysztof Barański, prof. UW

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
e-mail: baranski@mimuw.edu.pl