UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

UW MIM

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Prof. dr hab. Paweł Strzelecki, Instytut Matematyki

Warszawa, 1–6 kwietnia 2021 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Ramiego Ayousha

Rozprawa doktorska R. Ayousha, napisana w języku angielskim i zatytułowana *On the theory of s-Riesz sets*, oparta jest na wynikach, uzyskanych przez autora wspólnie z promotorem w następujących preprintach i pracach:

[A1] R. Ayoush, M. Wojciechowski. On dimension and regularity of bundle measures. Preprint, https://arxiv.org/pdf/1708.01458.pdf, praca złożona do publikacji.

[A2] R. Ayoush, D. Stolyarov, M. Wojciechowski. Hausdorff dimension of measures with arithmetically restricted spectrum. Praca przyjęta do publikacji w *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, https://arxiv.org/pdf/2002.06443.pdf.

[A3] R. Ayoush, M. Wojciechowski. Microlocal approach to the Hausdorff dimension of measures. Preprint, https://arxiv.org/pdf/2004.01626.pdf, praca złożona do publikacji.

Ponieważ przesłanym materiałom nie towarzyszą oświadczenia współautorów, przyjmuję – jak praktycznie wszyscy znani mi matematycy w podobnych sytuacjach – że wyniki powstały w ramach współpracy autorów i wszyscy wnieśli do odpowiednich artykułów równy wkład, podpisując się na pracy w porządku alfabetycznym. Przy takim założeniu piszę recenzję; już na wstępie chciałbym wyraźnie stwierdzić, że współpracę doktoranta z promotorem uważam za modelową i pożądaną, a zawartość i treść matematyczna recenzowanej rozprawy są w pełni wystarczające i spełniają wszelkie zwyczajowe wymagania.

Sama rozprawa polega na wspólnej prezentacji głównych osiągnięć trzech powyższych prac. Jak pisze sam autor w streszczeniu i we wstępie, podjęta tematyka to związki analizy harmonicznej (miar) i geometrycznej teorii miary, a ściślej: opis struktury nośników miar oraz ich prostowalności przy różnych warunkach natury geometryczno-arytmetycznej, nakładanych na transformaty Fouriera tych miar. Motywacja do prowadzenia takich badań jest co najmniej trojaka:

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 214
e-mail: P.Strzelecki@mimuw.edu.pl

- poszukiwanie daleko idących uogólnień klasycznego twierdzenia Rieszów, orzekającego, że skończona zespolona miara Borelowska μ na okręgu taka, że $\hat{\mu}(n) = 0$ dla $n < 0$, jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a;
- opis nośników miar gradientowych, generowanych przez funkcje o wahaniu skończonym, a także ogólniejszych miar wektorowych;
- badanie różnych charakteryzacji przestrzeni (typu) Hardy'ego i regularności obiektów, otrzymywanych przez osłabianie części założeń o symetrii w tych charakteryzacjach.

Nie licząc zwięzłego wprowadzenia i zarysowania kontekstu (Rozdział 1) oraz wstępnego rozdziału technicznego, w którym zebrane są standardowe definicje i fakty z pogranicza analizy harmonicznej i geometrycznej teorii miary (Rozdział 2), rozprawa jest podzielona na trzy zasadnicze części, odpowiadające pracom [A1]-[A3].

Pierwszą z nich stanowi Rozdział 3. Autor podejmuje w nim zagadnienia, nad którymi pracowali M. Roginskaya i M. Wojciechowski w pracy [RW], z 2006 roku. Rozważane są miary wektorowe $\mathcal{M}_\phi(\mathbb{R}^n, E)$, o wartościach w przestrzeni wektorowej E, podporządkowane danej *wiązce* ϕ, tzn. spełniające następujący dodatkowy warunek: dla zadanej wiązki, tzn. ciągłej funkcji $\phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{G}(m, E)$, jednorodnej stopnia 0, o wartościach w Grassmannianie $\mathbb{G}(m, E)$, zachodzi

$$\widehat{\mu}(\xi) \in \phi(\xi), \qquad \xi \neq 0.$$

(Widać, że jest to abstrakcyjne uogólnienie warunku, jaki spełniają miary gradientowe – dla nich po prostu $m = 1$ i $\phi(\xi) = \mathrm{span}(\xi) \in \mathbb{G}(1, \mathbb{R}^n)$.) Główne wyniki rozdziału, odpowiadające na pytania postawione w [RW], to Twierdzenia 3.7 i 3.8. Pierwsze z nich orzeka, że jeśli ϕ jest Lipschitzowska i spełnia warunek podobny do jednego z założeń twierdzenia Uchiyamy charakteryzującego przestrzeń Hardy'ego (przecięcie otoczek liniowych obrazów skończonego układu dwuwymiarowych podprzestrzeni jest puste), to (dolny) wymiar Hausdorffa miary μ wynosi co najmniej 2. Drugie jest wynikiem o prostowalności odpowiednich miar — mówi, że jeśli ϕ spełnia warunek Höldera z dowolnym wykładnikiem większym od $\frac{1}{2}$, a wiązka jest *antysymetryczna* (tzn. przecięcie wszystkich wartości $\phi(\xi)$ jest puste), to miara μ znika na wszystkich jednowymiarowych zbiorach całkowicie nieprostowalnych. Tematyka jest żywa i aktualna (i); dla mnie ważnym świadectwem tego faktu jest praca *Dimensional estimates and rectifiability for measures satisfying linear PDE constraints*, którą napisali A. Arroyo-Rabasa, G. De Philippis, J. Hirsch i F. Rindler, opublikowana w GAFA; związki m.in. z tą pracą są przekonująco omówione w podrozdziale 3.4 rozprawy. Dowody świadczą o tym, że autor biegle posługuje się różnymi narzędziami analizy harmonicznej, a także probabilistyki.

Samą zawartość Rozdziału 3 byłbym skłonny uznać za wystarczający materiał na doktorat.

Rozdział 4 jest w moim odczuciu najbardziej techniczny (w sensie: dowody wymagają konkretnych rachunków i dla czytelnika śledzącego kolejne kroki nie zawsze jest

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 214
e-mail: P.Strzelecki@mimuw.edu.pl

jasne, jaka intuicja czy klarowna myśl przewodnia kryje się za tymi rachunkami). Zawiera on oszacowania z dołu wymiaru Hausdorffa takich miar, dla których transformata Fouriera podlega dodatkowym ograniczeniom o charakterze arytmetycznym: znika poza punktami kq^n, gdzie $q > 1$ i ponadto liczba $k \pmod q \neq 0$ należy do ustalonej podgrupy w $\mathbb{Z}_q$ (patrz Twierdzenie 4.2 i Twierdzenie 4.25). Wśród wniosków z głównych wyników są oszacowania z dołu wymiaru Hausdorffa tzw. produktów Riesza — lepsze od dotychczas znanych.

Wreszcie, w Rozdziale 5 prezentowana jest zależność geometrycznych własności miar Radona — takich, jak wymiar Hausdorffa i prostowalność — od własności frontu falowego miary. Twierdzenie 5.2 stanowi kryterium, określające oszacowanie wymiaru Hausdorffa miary z dołu dzięki własnościom frontu falowego miary; zastosowanie tego kryterium do miar na sferze $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ daje kryterium prostowalności, uogólniające wyniki Aleksadrowa i Forelli'ego nt. miar pluriharmonicznych (tzn. takich miar, dla których całka Poissona jest funkcją pluriharmoniczną). Elegancki Wniosek 5.8 orzeka, iż dodatnia miara pluriharmoniczna na $\mathbb{S}^{2n-1}$ znika na wszystkich zbiorach E wymiaru $2n-2$, o skończonej mierze Hausdorffa $\mathscr{H}^{2n-2}$, nie tylko na podrozmaitościach wymiaru $2n-2$. Dowody w tym rozdziale są zwięzłe, dostępne dla każdego analityka, który ma roboczą wiedzę o teorii dystrybucji.

Jest rzeczą jasną, że autor jest świadom wielu otwartych pytań, jakie wiążą się z jego pracą i wynikami. To, a także różnorodność zaawansowanego analitycznego rzemiosła w dowodach, stanowi świadectwo jego matematycznej dojrzałości i (mam nadzieję) zapowiada dalszą karierę. Cała rozprawa napisana jest bardzo zwięźle; nie znalazłem żadnych istotnych usterek w dowodach czy treści. Główne zastrzeżenia, jakie mógłbym mieć, mają pomniejszy charakter: bardzo chętnie widziałbym w pracy obszerniejsze wprowadzenie, adresowane do stosunkowo szerokiego grona analityków, a także większą liczbę przykładów i nieco większą dbałość o czytelnika. W pewnym sensie, praca przypomina staranny zapis dowodów opowiadanych na seminarium — tylko w tekście brakuje gestów mówiącego i możliwości jednoczesnego spoglądania publiczności na kilka gęsto zapisanych tablic (przykład tego, o czym staram się napisać, widać np. na początku podrozdziału 4.4: przeczytanie ze zrozumieniem dwóch pierwszych zdań wymaga pamiętania oznaczeń, wprowadzanych na kilku wcześniejszych stronach, a kilkunastu literom nie towarzyszą wypowiedziane nazwy obiektów ani inne narzędzia, którymi autor może w podobnych sytuacjach wspomagać czytelnika). Nie umniejsza to jednak mojego szacunku dla dokonań autora.

Podsumowując, stwierdzam z przekonaniem, że rozprawa doktorska mgr. Ramiego Ayousha spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania, stawiane takim rozprawom. Wnoszę o dopuszczenie autora do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora.

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 214
e-mail: P.Strzelecki@mimuw.edu.pl