Grigor Sargsyan

Résumé

Stopnie Naukowe

- PhD in Mathematics, University of California, Berkeley, Wrzesień 2009.
  Tytuł: A tale of hybrid mice.
  Promotor: Prof. John Steel
  Laureat Herb Alexander Prize i Saks Prize
- BA in Mathematics, City University of New York Baccalaureate Program, Czerwiec 2003.
  Summa Cum Laude.

Dotychczasowe Naukowe Zatrudnienie

- Od Października 2021
  Profesor IMPAN,
  Instytut Matematyczny,
  Polska Akademia Nauk.
- Maj 2018-Czerwiec 2021
  Associate Professor of Mathematics,
  Rutgers University, NJ, USA.
- Wrzesień 2012-Maj 2018
  Assistant Professor of Mathematics,
  Rutgers University, NJ, USA.
- Wrzesień 2009-Sierpień 2012
  NSF Postdoctoral Research Fellow,
  UCLA, CA, USA.

- Wrzesień 2009-Sierpień 2011
  Assistant Adjunct Professor of Mathematics,
  UCLA, CA, USA.

Wybrane Uznania

- 2022-2025, członek Committee of Trustees,
  European Set Theory Society.
- 2022-2025, NCN Grant WEAVE-UNISONO, ID 543881
  Title: Classification of the derived models of determinacy.
- 2019-2021 NSF Grant DMS-1954149,
  Title: Descriptive Inner Model Theory.
- 2014-2019 NSF Career Award DMS-1352034,
  Title: Covering with derived models.
- 2015 Fellow w Newton Institute, w ramach programu Mathematical, Foundational and Computational Aspects of the Higher Infinite.
- 2012-2014 NSF Grant DMS-1201348,
  Title: Descriptive Inner Model Theory.
- 2009-2012 NSF Postdoctoral Research Fellow.
- 2012 Leibniz Fellow, Mathematics Forshungsinstitute Oberwolfach, Niemcy.
- 2009 Sacks Prize
  za najlepszą pracę doktorską w dziedzinie logiki matematycznej na świecie.
- 2009 Clay Liftoff Fellow.

The description of achievements set out in art. 219 para 1. point 2b.

Praca habilitacyjna nosi tytuł

The Core Model Induction beyond $L(\mathbb{R})$

---

i składa sie z następujących 6 opublikowanych prac.

Opublikowane Prace.

(1) Grigor Sargsyan, Covering with Chang models over derived models, Adv. Math. 384 (2021).

(2) Grigor Sargsyan, Translation procedures in descriptive inner model theory. Foundations of mathematics, 205-223, Contemp. Math., 690, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

(3) Grigor Sargsyan and Nam Trang, Tame failures of the unique branch hypothesis and models of $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}+\Theta$ is regular, Journal of Mathematical Logic, 16 (2016).

(4) Grigor Sargsyan, Covering with universally Baire operators, Adv. Math. 268, (2015).

(5) Grigor Sargsyan, Nontame mouse from a failure of square at a singular strong limit, J. Math. Log. 14 (2014), no. 1.

(6) Grigor Sargsyan and Nam Trang, Non-tame mice from tame failures of the Unique Branch Hypothesis, Canad. J. Math. 66 (2014).

Następujące nadesłane prace również są związane z Indukcją Rdzeniową (Core Model Induction) i będą omówione później.

Prace Nadesłane

(7) Grigor Sargsyan and Nam Trang, The Largest Suslin Axiom, nadesłane do Lecture Notes in Logic, dostępne tutaj.

(8) Grigor Sargsyan and Nam Trang, The exact consistency strength of generic absoluteness for universally Baire sets, nadesłane do Forum Sigma, dostępne tutaj.

(9) Grigor Sargsyan, Nam Trang and Trevor Wilson, Ideals and Strong Axioms of Determinacy, nadesłane do Journal of American Mathematical Society, dostępne tutaj.

Rękopisy

Grigor Sargsyan, Hod Mice and the Mouse Set Conjecture, volume 236 of Memoirs of the American Mathematical Society.

Streszczenie osiągnięć wymienionych powyżej

Ogólny kontekst

Teoria mnogości jest matematyczną dyscypliną badającą nieskończoność. Jej głównym celem jest rozwinięcie sposobów matematycznego myślenia o nieskończoności, które mają wyjaśnić nasze intuicje na jej temat, oraz które mają uczynić pojęcie nieskończoności użytecznym dla reszty matematyki. Pomimo względnie młodego wieku, teoria mnogości była w stanie odpowiedzieć zarówno na własne głębokie i fundamentalne problemy, jak i znalazła zastosowanie w innych dziedzinach. Zastosowanie teoriomnogościowych pomysłów i metod można odnaleźć w rozwiązaniu Problemu Kaplansky'ego autorstwa Roberta Solovaya i Hugh Woodina [4], Problemu Whiteheada autorstwa Saharona Shelaha [39], Problemu Browna-Douglasa-Fillmore'a autorstwa Ilijasa Faraha [5], Problemu von Neumanna autorstwa Matthew Foremana, Daniela Rudolpha i Benjamina Weissa [8] oraz Problemu Przestrzeni L (L Space Problem) autorstwa Justina Moore'a [29]. W literaturze można znaleźć mnóstwo podobnych przykładów zastosowań teoriomnogościowych idei.

Wiele skutecznych metod teorii mnogości zostało odkrytych w toku rozwiązywania problemów, które powstały w obrębie jej samej, problemów nie zdających się mieć a priori związku z C^* algebrami, nieskończonymi grupami, układami dynamicznymi czy topologią.

Deskryptywna teoria modeli wewnętrznych (Descriptive Inner Model Theory) (DIMT) jest dziedziną łączącą techniki *deskryptywnej teorii mnogości* i *teorii modeli wewnętrznych* w celu rozwiązania podstawowych problemów postawionych w ramach Programu Gödla.

Program Gödla jest dużym przedsięwzięciem naukowym dotyczącym najbardziej fundamentalnej trudności pojawiającej się w teorii mnogości, *niezależności*: niemożności rozstrzygnięcia w ramach standardowej aksjomatyki (ZFC), czy jej dowolnego niesprzecznego rozszerzenia, narzucających się pytań na temat nieskończonych zbiorów, między innymi Hipotezy Continuum (CH). Program Gödla polega na usuwaniu nierozstrzygalności z podstaw matematyki poprzez badanie naturalnych rozszerzeń ZFC. Jego celem jest pozbycie się hipotez niezależnych od danej naturalnej, stanowiącej podstawę matematyki, teorii T poprzez przejście do silniejszej teorii, która będzie tak samo naturalna jak T, oraz która rozstrzygnie wszystkie, lub niektóre, pytania nierozstrzygalne na gruncie T. Pomysł Gödla streszczony w [9] był taki, że iterowanie tego procesu miałoby rozwiązać wszystkie problemy niezależne od ZFC i że wszystkie te problemy będą rozwiązane w ramach tzw. **Hierarchii Wielkoliczbowej (Large Cardinal Hierarchy)** (LCH). Pomimo tego, że LCH nie jest w stanie spełnić marzeń Gödla, co pokazali Levy i Solovay w swoim głośnym wyniku, istnieją inne hierarchie teoriomnogościowe, takie jak aksjomaty forsingowe (forcing axioms) lub aksjomaty determinacji - są one ściśle powiązane z LCH i znakomicie służą do rozwiązywania naturalnych problemów, takich jak CH, które są nierozstrzygalne na gruncie ZFC. Jednakże, wielość aksjomatyk o charakterze podstawowym, które istotnie wzmacniają teorię mnogości, tworzy niejasności przez co ważne pytania, takie jak CH, w gruncie rzeczy pozostają nierozwiązane.

Program Steela jest modyfikacją Programu Gödla, która dotyczy problemu niezgodności poszczególnych użytecznych teorii podstawowych (patrz [49]). Według Steela to nie jest istotne, czy da się znaleźć teorię opisującą jedyny, prawdziwy w sensie Platońskim, model teorii mnogości, — taki projekt wydaje się być nie do zrealizowania, — ale czy da się przetłumaczyć pytania jednej podstawowej teorii na pytania drugiej. W jego opinii, różnica pomiędzy naturalnymi teoriami podstawowymi, rozstrzygającymi CH na różne sposoby, jest podoba do tej pomiędzy językami. Pomimo iż różne podstawy mogą dawać inne odpowiedzi na CH, powinno być możliwe zinterpretowanie jednej teorii w obrębie drugiej i pokazanie w ten sposób, że konkretne rostrzygnięcie CH nie ma dużego znaczenia. Innymi słowy, nie jest ważne czy CH jest rozstrzygana tak samo przez każdą podstawę, ale czy wszystkie znaczące sposoby rozumowania o Continuum mogą być tłumaczone między sobą.

Takie tłumaczenia między podstawami realizuje się zazwyczaj albo za pomocą forsingu zapoczątkowanego przez Cohena, albo Indukcji Rdzeniowej (Core Model Induction) (CMI) Hugh Woodina. Forsing jest narzędziem konstruowania *zewnętrznych* modeli natomiast CMI jest narzędziem konstruowania *wewnętrznych* modeli i matematycy zajmujący się teorią mnogości używają obu, aby tworzyć tłumaczenia pomiędzy róznymi teoriami podstawowymi.

Stanie się jasne dla każdego czytającego moje prace, że Program Steela wywarł na nie ogromny wpływ.

Zaplecze

Deskryptywna teoria mnogości.

Motorem rowojowym dla większości teorii mnogości była Hipoteza Continuum (CH) Cantora. Można powiedzieć, że klasyczna deskryptywna teoria mnogości, rozwijana przez Rosyjskich matematyków Luzina, Suslina i Aleksandrowa, była próbą jej (Hipotezy Continuum) rozwiązania. Jednym z ich głównych wyników jest dowód, że wszystkie analityczne podzbiory prostej rzeczywistej są albo przeliczalne, albo równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych, co oznacza, że CH zachodzi dla zbiorów analitycznych. Dowód ten jest tak wpływowy, że wiele pomysłów we współczesnej deskryptywnej teorii mnogości stojących za takimi pojęciami jak *skale (scales)*, czy *zbiory Suslina (Suslin sets)* ma swoje korzenie w tym jednym dowodzie.

Nie mogąc rozszerzyć swojej analizy zbiorów analitycznych na hierarchię zbiorów definiowalnych i rezonując niejako pytanie Lebesgue'a, czy da się *wskazać* zbiór niemierzalny, Luzin stwierdził w swojej słynnej deklaracji, że "nie wiadomo i nie będzie wiadomo" czy wszystkie definiowalne, albo nawet rzutowe podzbiory prostej rzeczywistej podlegają CH lub są mierzalne w sensie Lebesgue'a. To jest początek nowoczesnej deskryptywnej teorii mnogości, badań własności teoriomnogościowych definiowalnych liczb rzeczywistych, zbiorów liczb rzeczywistych w ogólności i naturalnych obektów nieskończonych (takich jak Borelowskie relacje równoważności). Filozofia deskryptywnej teorii mnogości, rozwinięta przez grupę Kabalistów (Cabal group) [1], jest podobna do tej Programu Gödla: znaleźć naturalne aksjomaty o zbiorach liczb rzeczywistych, które mogą zostać użyte do uogólnienia teorii zbiorów analitycznych na kolejne stopnie hierarchii zbiorów definiowalnych.

Aksjomat Determinacji

Załóżmy że X jest zbiorem $A \subseteq X^\omega$. Rozważmy grę G_A^X w której gracze I i II wykonują ruchy naprzemiennie wybierając elementy X. Gra trwa ω tur, skutkując utworzeniem ciągu $\vec{x} = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$. Gracz I wygrywa grę jeśli $\vec{x} \in A$. W przeciwnym razie, Gracz II wygrywa. A jest *zdeterminowany*, jeśli jeden z graczy ma strategię wygrywającą w G_A^X.

Definicja 0.1 $\mathsf{AD_X}$ *jest stwierdzeniem, że wszystkie podzbiory X^ω są zdeterminowane (w szczególności, jeden z graczy ma strategię wygrywającą).*

W przypadku $X = \omega$, $\mathsf{AD_X}$ jest znanym $\mathsf{Aksjomatem\ Determinacji}$ (AD). AD^+ jest wzmocnieniem AD sformułowanym przez Woodina (patrz [22]). Nie wiadomo, czy AD pociąga AD^+. Wiadomo jednak, że jeśli $L(\mathbb{R}) \vDash \mathsf{AD}$ to $L(\mathbb{R}) \vDash \mathsf{AD}^+$. W celu praktycznym, czytelnik może nie zwracać uwagi na $+$.

Od publikacji AD przez Mycielskiego i Steinhausa [30] w latach 60, badanie jego modeli stało się sporym tematem we współczesnej teoii mnogości. Wkrótce AD został głównym aksjomatem używanym do badania regularnościowych własności definiowalnych zbiorów liczb rzeczywistych, jako że pociąga za sobą większość znanych takich własności [2]. AD jest znakomitym przykładem aksjomatu, którego szukali Kabaliści.

Kabaliści zapoczątkowali badanie hierarchii defniowalności przy założeniu AD i pokazali, że teoria zbiorów analitycznych przenosi się na wszystkie dostatecznie domknięte poziomy hierarchii definiowalności. W szczególności, wszystkie nieparzyste poziomy hierarchii rzutowej posiadają własności podobne do zbiorów koanalitycznych. Ich wyniki można znaleźć w natępujących tomach: [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20].

---

[1] Grupa badaczy teorii mnogości z Kalifornii, Caltech i UCLA.

[2] W szczególności: własność zbioru doskonałego, mierzalność w sensie Lebesgue'a, własność Baire'a itd.

Jedną z najważniejszych własności nieskończonych liczb kardynalnych odkrytą i zbadaną przez Kabalistów jest bycie liczbą Suslina.

Definicja 0.2 *Zbiór liczb rzeczywistych $A \subseteq \omega^\omega$ jest κ-Suslina jeśli istnieje drzewo $T \subseteq \omega^{<\omega} \times \kappa^{<\omega}$ takie że $A = p[T]$ gdzie $p[T] = \{x \in \mathbb{R} : \exists f : \omega \to \kappa \forall n \in \omega (x \upharpoonright n, f \upharpoonright n) \in T\}$. κ jest liczbą Suslina jeśli istnieje zbiór liczb rzeczywistych A który jest κ-Suslina ale nie jest -Suslina dl wszystkich $< \kappa$.*

Liczby i zbiory Suslina są interesujące wyłącznie w kontekstach takich jak AD, ograniczających dyskusję do zbiorów definiowalnych. Shoenfield pokazał, że wszystkie Σ^1_2-zbiory są ω_1-Suslina poprzez drzewo $T \in L$. Są podobne reprezentacje dla Σ^1_3, Σ^1_4 itd. ale wymagają one więcej niż ZFC.

Przy założeniu $\mathsf{ZF} + \mathsf{DC} + \mathsf{AD}$, zbiory liczb rzeczywistych mogą zostać umieszczone w hierarchii *złożoności*, tzw. *Hierarchii Wadge'a*, uporządkowanej przez ciągłą redukowalność, czy raczej redukowalność Wadge'a (patrz [53]). Dla liczby porządkowej α, niech Γ_α będzie α-tym poziomem wspomnianej hierarchii. Waga liczb Suslina polega na tym, że poziomy hierarchii na których pojawia się nowa informacja, odpowiadają liczbom Suslina. Tą nową informacją jest w zasadzie drzewo z Definicji 0.2 (patrz [44] i [10]).

Definicja 0.3 $\Theta = \sup\{\alpha :$ *istnieje surjekcja* $f : \mathbb{R} \to \alpha\}$

Wiadomo, że hierarchia Wadge'a ma długość Θ (patrz [10]).

Hierarchia Solovaya

Solovay wynalazł genialny sposób mierzenia stopnia zdeterminowania zbiorów w uniwersum. Mając na uwadze definicję Θ (patrz Definicja 0.3), X jest OD_Y jeśli dla pewnego $s \in \mathsf{Ord}^{<\omega}$, X jest defniowalny z Y i s.
Ciąg Solovaya jest zamkniętym ciągiem $(\theta_\alpha : \alpha \leqslant \Omega)$ liczb porządkowych zdefiniowanym następująco:

1. $\theta_0 = \sup\{\beta : \exists f : \wp(\omega) \to \beta(f \text{ jest surjekcją będącą OD})\}$
2. Dla $\alpha + 1 \leqslant \Omega$, $\theta_{\alpha+1} = \sup\{\beta : \exists f : \wp(\theta_\alpha) \to \beta(f \text{ jest surjekcją będącą OD})\}$
3. Dla granicznej $\alpha \leqslant \Omega$, $\theta_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \theta_\beta$.
4. Ω jest najmniejsza taka, że $\theta_\Omega = \Theta$.

Poprzez Ω, jest możliwe otrzymanie hierarchii aksjomatów determinacji. I tak, $\mathsf{AD}^+ + \Theta = \theta_1$ jest silniejszym aksjomatem niż $\mathsf{AD}^+ + \Theta = \theta_0$.
Θ_{reg}, wprowadzony poniżej, jest aksjomatem z tej hierarchii.

Definicja 0.4 Θ_{reg} *jest teorią* $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ + "Θ *jest regularną liczbą kardynalną".*

Wynik otrzymany przez Martina i Woodina mówi, że Θ_{reg} jest równoważna z $\mathsf{AD}^+ + \Omega = \Theta$ + "Θ jest regularną liczbą kardynalną". Θ_{reg} odgrywa znaczącą rolę w badaniu hierarchii Solovaya i w teorii mnogości w ogóle. Jednym z powodów jego istotności jest następujące ważne twierdzenie Woodina, które wzmacnia wcześniejszą przełomową pracę Steela-Wesepa (patrz [51]).

Twierdzenie 0.5 (Woodin) *Załóżmy* $\mathsf{ZF}+\Theta_{\mathsf{reg}}+\mathsf{V}=\mathsf{L}(\wp(\mathbb{R}))$*. Wtedy istnieją częściowy porządek* $\mathbb{P}$ *i częściowy porządek* $\mathbb{Q}$ *takie, że jeśli* $G \subseteq \mathbb{P}$ *i* $H \subseteq \mathbb{Q}$ *są generyczne, to zachodzą następujące:*

1. $V[G] \models \mathsf{ZFC} + \mathsf{MM}^{++}(\mathsf{c})$[3].
2. $V[H] \models \mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$ + "*Istnieje* ω_1 *gęsty ideał na* ω_1"[4].

Innym ważnym aksjomatem w hierarchii Solovaya jest Aksjomat Największej Liczby Suslina (The Largest Suslin Axiom) (LSA).

Definicja 0.6 (Woodin w [55]) Aksjomat Największej Liczby Suslina[5] *to koniunkcja następujących aksjomatów.*

1. AD^+.
2. *Istnieje największa liczba Suslina.*
3. *Jeśli* κ *jest największą liczbą Suslina, to dla każdego* $\lambda < \kappa$ *nie ma OD surjekcji* $f : \wp(\ll) \to \kappa$.

LSA jest silniejszy od Θ_{reg}. W ogólności, z rezultatów Martina i Woodina wynika, że przy założeniu $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$, ciąg Solovaya ma graniczną długość, podczas gdy w obecności największej liczby Suslina, ciąg Solovaya ma długość będącą następnikiem. I tak, LSA należy do następnikowych stopni Hierarchii Solovaya, gdy Θ_{reg} należy do poziomów granicznych. Jednakże, LSA jest czymś na rodzaj anomalii ponieważ nie posiada własności najczęściej spotykanych na poziomach następnikowych Hierarchii Solovaya. Zachowuje się bardziej jak hybryda poziomu następnikowego i granicznego.

Współcześnie, aksjomat odgrywa kluczową rolę w wielu aspektach teorii modeli wewnętrznych, i funkcjonuje wyraźnie w Ostatecznym L (Ultimate L Framework) Woodina[6].

[3] MM to aksjomat forsingowy Maksimum Martina (Martin's Maximum) i MM(c) jest tym samym aksjomatem dla częściowych porządków mocy continuum. Po więcej informacji o MM^{++} patrz [7]. Dowód wyniku można znaleźć w [55, Rozdział 9.2.2].

[4] Dowód mozna znaleźć w Pracy (14).

[5] Terminologia jest mojego autorstwa.

[6] Patrz [56, Definicja 7.14] i Aksjomat I i Aksjomat II na stronie 97 w [56].

Zbiory uniwersalnie Baire'a

Zbiór liczb rzeczywistych A jest uB (uniwersalnie Baire'a), jeśli jego wszystkie ciągłe przeciwobrazy mają własność Baire'a (patrz [6]). Równoważnie, zbiór liczb rzeczywistych $A \subseteq \mathbb{R}$ jest uB wtedy i tylko wtedy gdy jest κ-uB dla wszystkich κ, i A jest κ-uB jeśli są drzewa T i S na $\omega \times \kappa$ takie że $A = p[T]$ i jeśli g jest generyczny dla porządku częściowego mocy $< \kappa$, w $V[g]$, $p[S] = (p[T])^c$ (patrz [6]). Naturalną interpretacją A w $V[g]$ jest $A_g = (p[T])^{V[g]}$. Da się pokazać, że A_g nie zależy (T, S).

Definicja 0.7 *Niech* uB^κ *będzie zbiorem* κ*-uB zbiorów liczb rzeczywistych, i jeśli* g *jest generyczny, to niech* $\mathsf{uB}^\kappa_g = (\mathsf{uB}^\kappa)^{V[g]}$ *i* $\mathsf{uB}_g = \cap_\kappa \mathsf{uB}^\kappa_g$.

Niesprzeczność AD była dużym otwartym problemem w teorii mnogości. W pracy o donośnym znaczeniu, która została nagrodzona w 1988 Nagrodą Karpa (Karp Prize),- najbardziej prestiżową nagrodą oferowaną przez Association of Symbolic Logic,- Tony Martin, John Steel i Hugh Woodin pokazali, że przy założeniu istnienia nieskończenie wielu liczb Woodina i liczby mierzalnej nad nimi, AD zachodzi w $L(\mathbb{R})$ [27, 54, 26]. Woodin później udowodnił twierdzenie o modelu otrzymanym (derived model theorem), które jest naszą główną metodą otrzymywania determinacji z istnienia dużych liczb kardynalnych.

Niech λ będzie liczbą kardynalną, $g \subseteq Coll(\omega, < \lambda)$ będzie generyczny i $\alpha < \lambda$. Niech też $g_\alpha = g \cap Coll(\omega, < \alpha)$. Jeśli $\alpha < \lambda$ i $A \in \mathsf{uB}^\lambda_{g_\alpha}$, połóżmy $A^* = \cup_{\beta \in [\alpha, \lambda)} A_{g_\beta}$, $\mathbb{R}^* = \cup_{\alpha<\lambda} \mathbb{R}^{V[g_\alpha]}$, $\Gamma = \{A : \exists \alpha < \lambda \exists B \in \mathsf{uB}^\lambda_{g_\alpha} (A = B^*)\}$, i niech Γ^+ będzie zbiorem $A \in V(\mathbb{R}^*) \cap \wp(\mathbb{R}^*)$ takim że $L(A, \mathbb{R}^*) \vDash \mathsf{AD}^+$.

Twierdzenie 0.8 (Twierdzenie o Modelu Otrzymanym, [42]) *Załóżmy że* λ *jest granicą liczb Woodina i* $g \subseteq Coll(\omega, < \lambda)$ *jest generyczny. Wtedy* $L(\Gamma, \mathbb{R}^*) \vDash \mathsf{AD}^+$ *i* $L(\Gamma^+, \mathbb{R}^*) \vDash \mathsf{AD}^+$*. Co więcej, jeśli* λ *jest granicą liczb* $< \lambda$*-silnych (*λ*-strong) to* $\Gamma = \Gamma^+$ *i* $L(\Gamma, \mathbb{R}^*) \vDash \mathsf{AD}_\mathbb{R}$.

Generyczna absolutność i Sealing

Jednym z głównych tematów w badaniu generycznej absolutności jest badanie wyników podobnych do Twierdzenia Schoenfielda o Absolutności. Idąc w tym kierunku, Woodin udowodnił silną wersję tego twierdzenia dla pojedynczych uB zbiorów.

Twierdzenie 0.9 *Załóżmy, że istnieje klasa liczb Woodina i załóżmy, że* $A \subseteq \mathbb{R}$ *jest zbiorem uB. Wtedy, jeśli* g *jest* V*-generyczny, to istnieje zanurzenie elementarne* $j : L(A, \mathbb{R}) \to L(A_g, \mathbb{R}_g)$ *takie że* $j(A) = A_g$.

Sealing jest stwierdzeniem, że podobna generyczna absolutność zachodzi dla zbioru wszystkich uB zbiorów.

Definicja 0.10 Sealing *jest koniunkcją następujących stwierdzeń.*

1. *Jeżeli g jest V-generyczny, $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g) \models \mathsf{AD}^+$ i w $V[g]$, $\wp(\mathbb{R}_g) \cap L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g) = \mathsf{uB}_g$.*

2. *Jeżeli g jest V-generyczny i h jest $V[g]$-generyczny, to istnieje elementarne włożenie $j : L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g) \to L(\mathsf{uB}_{g*h}, \mathbb{R}_{g*h})$ takie że $j(A) = A_h$ dla dowolnego $A \in \mathsf{uB}_g$.*

W świetle Twierdzenia 0.9, naturalnym jest pytanie o to, czy Sealing jest konsekwencją aksjomatu wielkoliczbowego. Mimo łagodnego brzmienia, pytanie to niesie za sobą poważne konsekwencje dla *problemu modelu wewnętrznego (inner model problem)* (patrz niżej). Nieoczekiwanie jednak, Woodin pokazał, że Sealing zachodzi w rozszerzeniu generycznym.

Twierdzenie 0.11 (Woodin, [24]) *Załóżmy, że κ jest liczbą superzwartą i że istnieje klasa liczb Woodina. Niech $g \subseteq Coll(\omega, 2^{2^\kappa})$. Wtedy $V[g] \models$ Sealing.*

Program Modelu Wewnętrznego i Problem Modelu Wewnętrznego

Celem Programu Modelu Wewnętrznego (Inner Model Program) (IMP) jest konstrukcja L-podobnych modeli wewnętrznych zawierających duże liczby kardynalne. Problem konstrukcji kanonicznego modelu wewnętrznego dla aksjomatu wielkoliczbowego ϕ jest znany jako Problem Modelu Wewnętrznego (Inner Model Problem) (IMPr) dla ϕ. Istnieje wiele artykułów wyjaśniających na temat IMP i IMPr. Czytelnik chcący dowiedzieć się więcej na ten temat powinien zajrzeć do [12], [35], [37].

W [32], Neeman, zakładając istnienie liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina, rozwiązał IMPr dla liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina i dla liczb nieco większych. Wynik Neemana jest najlepszym bieżącym wynikiem dla IMPr. Jednakże, to jest rozwiązanie dla jedynie drobnego wycinka raju aksjomatów wielkoliczbowych, oraz *jest ono specyficzne dla hipotezy* (nad tą kwestią się jeszcze pochylimy).

Niestety Sealing implikuje, że IMP, w swojej współczesnej formie, nie może zostać zrealizowany, ponieważ jeśli $\mathcal{M}$ jest modelem spełniającym oczekiwania współczesnej teorii modeli wewnętrznych i posiada pewne podstawowe własności domknięcia, to $\mathcal{M} \models$ "istnieje dobre uporządkowanie liczb rzeczywistych w $L(\Gamma^\infty, \mathbb{R})$". Ponieważ z AD wynika, że liczby rzeczywiste nie mogą zostać dobrze uporządkowane, $\mathcal{M}$ nie może spełniać Sealingu. Zatem, mamy co następuje [7]:

---

[7] Dychotomia Sealingu jest dobrze znana wśród badaczy teorii modeli wewnętrznych i nie mamy na myśli, że zauważyliśmy ją pierwsi.

Dychotomia Sealingu (Sealing Dichotomy)
Albo żadna teoria wielkoliczbowa nie pociąga Sealingu, albo Problem Modelu Wewnętrznego dla pewnej liczby kardynalnej nie ma rozwiązania spełniającego współczesne normy.

Myszki (Mice) i Ekstendery x

W celu wyjaśnienia na czym polega IMPr, wprowadzimy pojęcia *ekstendera* i *iterowalności*. Ekstendery to po prostu koherentne ciągi ultrafiltrów. Jak zostało wspomniane, celem IMP jest konstrukcja kanonicznych L-podobnych modeli wewnętrznych dla aksjomatów wielkoliczbowych. Współczesna metodologia jest taka, że te modele są otrzymywane w Gödlowski sposób z ekstenderów, obiektów których istnienie wynika z aksjomatów wielkoliczbowych. Ekstendery najlepiej się wprowadza poprzez indukowane przez nie elementarne włożenia.

Załóżmy, że M i N są przechodnimi modelami teorii mnogości i $j : M \to N$ jest nietrywialnym włożeniem elementarnym. Niech $\kappa = \mathrm{crit}(j)$ i niech $\lambda \in [\kappa, j(\kappa))$ będzie liczbą porządkową. Połóżmy

$$E_j = \{(a, A) \in [\lambda]^{<\omega} \times \wp(\kappa)^M : a \in j(A)\}.$$

E_j nazywamy (κ, λ)-ekstenderem otrzymanym z j. E_j jest tak naprawdę M-ekstenderem, jako że mierzy on zbiory w M. Można również zdefiniować ekstendery abstrakcyjnie poprzez ultrafiltry, bez odwołania do stowarzyszonego j, i wtedy pokazać, konstruując ultrapotęgę, istnienie elementarnego włożenia. Dla danego (κ, λ)-ekstendera E nad M, niech $\pi_E : M \to Ult(M, E)$ będzie kanonicznym włożeniem w ultrapotęgę. Obliczenia polegające na rozwinięciu definicji pokazują, że E jest ekstenderem otrzymanym z π_E. Podobne obliczenia pokazują również, że $\kappa = \mathrm{crit}(\pi_E)$ i $\pi_E(\kappa) \geqslant \lambda$. Zazwyczaj stosuje się oznaczenie $\mathrm{crit}(E)$ na κ i $lh(E) = \lambda$[8]. Nietrudno zauważyć, że dla $a \in [\lambda]^{<\omega}$, E_a jest ultrafiltrem skupionym na $[\kappa]^{|a|}$, i że jeśli $a \subseteq b$ to E_b *naturalnie* rzutuje się na E_a.

Motywacją dla wprowadzenia ekstenderów jest fakt, że otrzymywana za ich pomocą ultrapotęga łapie większy fragment uniwersum niż ultrapotęga konstruowana w zwyczajny sposób. W szczególności, przy założeniu wielkoliczbowym, można mieć (κ, λ)-ekstender E taki że $V_\lambda \subseteq Ult(V, E)$. Z tego powodu, wszystkie pojęcia wielkoliczbowe słabsze od liczby supersilnej (superstrong cardinal) mogą zostać złapane przez ekstender.

Ekstendery zdefniowane w sposób powyższy są nazywane *krótkimi* ekstenderami, gdzie krótkość odnosi się do faktu, że wszystkie jego ultrafltry są skoncentrowane na jego punkcie krytycznym. Pojęcia wielkoliczbowe, takie jak superzwartość (supercompactness), ogromność (hugeness) itd. nie mogą zostać złapane przez krótki ekstender, ponieważ zanurzenia świadczące o superzwartości generują miary, które nie są skoncentrowane na punkcie krytycznym. Jednakże, można złapać te pojęcia wielkoliczbowe za pomocą tak zwanych *długich* ekstenderów (które nie będą nam potrzebne).

---

[8] "$lh(E)$ jest długością E".

Obszar założeń wielkoliczbowych łapany przez krótkie ekstendery to obszar *liczb supersilnych*. Liczba κ jest jest supersilna, jeśli istnieje zanurzenie $j : V \to M$ z punktem krytycznym $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ i $V_{j(\kappa)} \subseteq M$. Liczby supersilne są bliskie optymalnym pojęciom wielkoliczbowym dającym się wyrazić za pomocą krótkich ekstenderów.

Obecnie, w celu rozwiązania IMPr dla pewnego założenia wielkoliczbowego, próbuje się konstruować model postaci $L[\vec{E}]$ gdzie $\vec{E}$ jest starannie dobranym ciągiem ekstenderów. Czytelnik zainteresowany dokładną postacią $L[\vec{E}]$ powinien zajrzeć do [48].

Myszki (Mice) to *iterowalne prawiemyszki (iterable premice)*. Prawiemyszka to struktura postaci $L_\alpha[\vec{E}]$ gdzie $\vec{E}$ jest *koherentnym (coherent) ciągiem ekstenderów*. Ekstendery to koherentne kolekcje ultrafiltrów. Czytelnik nic nie straci, jeśli będzie je traktował jako ultrafiltry. Intuicyjnie, $\mathcal{M} = L_\alpha[\vec{E}]$ jest iterowalny, jeśli iteracja konstrukcji ultrapotegi $\mathcal{M}$ skutkuje wyłącznie dobrze ufundowanymi modelami. Bardziej formalnie, $\mathcal{M}$ jest iterowalna jeśli Gracz II ma strategię wygrywającą w *grze iteracji (iteration game)* $\mathcal{G}_{\omega_1+1}(\mathcal{M})$. $\mathcal{G}_\xi(\mathcal{M})$ jest grą dwuosobową długości ξ, w której gracze tworzą ciągi prawiemyszek i zanurzeń między nimi w następujący sposób.

Gracz I gra w krokach następnikowych i Gracz II gra w krokach granicznych. Załóżmy, że w kroku $\eta+1 < \xi$, w wyniku gry zostały utworzone prawiemyszki $\langle \mathcal{M}_\alpha : \alpha \leqslant \eta \rangle$. Gracz I wybiera wtedy ekstender E z $\mathcal{M}_\eta$, oraz odpowiedni $\alpha \leqslant \eta$ i wtedy $\mathcal{M}_{\eta+1} = Ult(\mathcal{M}_\alpha, E)$. Czasami $\alpha < \eta$ co sprawia, że że przebieg gry przypomina drzewo, *drzewo iteracyjne (an iteration tree)*. W kroku granicznym λ, II musi wybrac gałąź drzewa iteracyjnego w taki sposób, że granica skierowana modeli z gałęzi jest dobrze ufundowana. Wtedy $\mathcal{M}_\lambda$ jest dokładnie tą granicą skierowaną (direct limit). II wygrywa, jeśli wszystkie modele w końcowym drzewie iteracyjnym są dobrze ufundowane. Σ jest *strategią iteracji (iteration strategy)* dla $\mathcal{M}$ jeśli jest strategią wygrywającą dla II w grze iteracyjnej długości $\omega_1 + 1$ na $\mathcal{M}$. Mysz nazywamy ξ-iterowalną jeśli II ma wygrywającą strategię w $\mathcal{G}_\xi(\mathcal{M})$. Σ jest ξ-strategią iteracyjną, jeśli jest strategią wygrywającą dla II w $\mathcal{G}_\xi(\mathcal{M})$.

Problem HOD (The HOD Problem)

W latach 70. i 80., grupa badaczy teorii mnogości, znana jako grupa Kabalistów, dokonała dokładnej analizy $L(\mathbb{R})$ zakładając AD w $L(\mathbb{R})$. W ramach tej analizy Moschovakis zainicjował badanie *uniwersów gier (playful universes)*, z których największym w $L(\mathbb{R})$ jest $\mathrm{HOD}^{L(\mathbb{R})}$. Przypomnijmy, że HOD to uniwersum zbiorów dziedzicznie porządkowo definiowalnych (hereditarily ordinal definable) i że $\mathrm{HOD} \vDash \mathsf{ZFC}$. Kabaliści zauważyli, że $\mathrm{HOD}^{L(\mathbb{R})}$ ma mnóstwo interesujących strukturalnych własności. Na przykład, pokazali że $\mathrm{HOD}^{L(\mathbb{R})} \vDash \mathsf{CH}$ i że $\omega_1^{L(\mathbb{R})}$ jest najmniejszą mierzalną liczbą w HOD. Co więcej, Kunen pokazał, że AD implikuje, że przeliczalnie zupełne ultrafiltry na liczbach porządkowych $< \Theta$ są porządkowo definiowalne, co pociąga że $\mathrm{HOD} \vDash$ "Θ jest granicą liczb mierzalnych".

Punktem kulminacyjnym tych wyników było twierdzenie Woodina, że zakładając AD, jeśli $(\theta_\alpha : \alpha \leqslant \Omega)$ jest ciągiem Solovaya, to dla $\alpha + 1 \leqslant \Omega$ zachodzi $\mathrm{HOD} \vDash$ "$\theta_{\alpha+1}$ jest liczbą Woodina". Zatem naturalnym kierunkiem badań stało się szukanie interesujących własności HOD przy założeniu AD lub AD^+.

Pierwszy duży przełom nastąpił w latach 90., kiedy Steel pokazał, że zakładając $V = L(\mathbb{R}) + \mathsf{AD}$, V_Θ^{HOD} jest uniwersum prawiemyszki (przypomnijmy, że prawiemyszki to struktury postaci $(L_\alpha[\vec{E}], \vec{E}, \in)$). Woodin natomiast pokazał, że całe HOD nie jest prawiemyszką, ale jest *myszką hod (hod mouse)* którą zdeiniujemy później. Ważną konsekwencją tych prac jest to, że zakładając $V = L(\mathbb{R}) + \mathsf{AD}$, zachodzi HOD $\vDash \mathsf{GCH}, \diamond$ itd. Nagle, Kabaliści mogli zacząć używać nie tylko metod związanych z AD, ale również wyrafinowanej maszynerii modeli wewnętrznych do dowodzenia twierdzeń o $L(\mathbb{R})$ lub przy założeniu AD^+ w ogólności. Jednym z takich zaskakujących dowodów używających modeli wewnętrznych jest dowód Steela i Woodina, że AD^+ implikuje, że wszystkie liczby kardynalne $< \Theta$ są mierzalne. Jednakże, następujący fundamentalny problem pozostał otwarty.

Problem HOD: Wersja uproszczona. Załóżmy AD^+. Czy HOD $\vDash \mathsf{GCH}$?

Oczekuje się, że odpowiedź jest pozytywna, oraz że dowód będzie przypominał dowód w przypadku $L(\mathbb{R})$. Ściślej mówiąc, oczekuje się że jedyny sposobem na rozwiązanie Problemu HOD jest rozwiązanie go w następującej, modelowej wersji.

Problem HOD. Załóżmy AD^+. Czy HOD jest strategiczną prawiemyszką (strategic premouse)?

Problem HOD jest najbardziej wymagającym otwartym problemem deskryptywnej teorii modeli wewnętrznych. Jest wpisany w każdy aspekt tego zestawienia i jest głównym kierunkiem badań Sargsyana.

HOD Myszki

Strategiczne ekstenderowe modele, lub strategiczne prawiemyszki, to struktury postaci $\mathcal{M} = L_\alpha[\vec{E}, \Sigma]$ gdzie Σ jet strategią iteracji. Tutaj, Σ jest wewnętrzna dla $\mathcal{M}$, tj. dotyczy wyłącznie iteracji zawartych w $\mathcal{M}$. Strategiczne prawiemyszki pojawiające się w badaniach HOD w modelach z determinacją są nazywane hod myszkami, są to strategiczne myszki postaci $\mathcal{M} = L_\alpha[\vec{E}, \Sigma]$ gdzie Σ jest strategią dla samego $\mathcal{M}$. Tak jak w przypadku prawiemyszek, hod myszka jest iterowalną hod prawiemyszką poprzez strategię zgodną ze strategią wewnętrzną hod prawiemyszki.

Teoria hod myszek jest rozwijana w analogii do teorii zwykłych myszek. Główne narzędzie jest znane pod nazwą przyrównywanie (comparision). Powiemy że $(\mathcal{M}, \Sigma)$ jest hod parą jeśli $\mathcal{M}$ jest hod myszką i Σ jest jej strategią. $\mathcal{P}$ nazwijmy Σ-iteratem $\mathcal{M}$ jeśli jest ostatnim modelem w pewnym przebiegu gry iteracji na $\mathcal{M}$ w której Gracz II gra według

Σ. Zauważmy że $\mathcal{P}$, będąc iteratem $\mathcal{M}$, ma postać $L_\alpha[\vec{E}^{\mathcal{P}}, \Sigma^{\mathcal{P}}]$. Załóżmy teraz, że $\beta \leqslant \alpha$. Połóżmy $\mathcal{P}|\beta = L_\beta[\vec{E}^{\mathcal{P}}, \Sigma^{\mathcal{P}}]$. Wtedy mamy, że Σ indukuje strategię iteracji $\Sigma_{\mathcal{P}|\beta}$ dla $\mathcal{P}|\beta$. Otrzymujemy ją najpierw ustalając przebieg p gry iteracji na $\mathcal{M}$ tworzącej $\mathcal{P}$, i potem kładąc $\Sigma_{\mathcal{P}|\beta}(q) = \Sigma(p^\frown q)$, gdzie q jest przebiegiem gry iteracji na $\mathcal{P}|\beta$. Tak zdefiniowana $\Sigma_{\mathcal{P}|\beta}$, zależy od p, ale w praktyce, wszystkie istotne strategie iteracji mają dodatkową własność niezależności od p.

Załóżmy że $(\mathcal{M}, \Sigma)$ i $(\mathcal{N}, \Lambda)$ są dwiema hod parami. Przyrównanie dla $(\mathcal{M}, \Sigma)$ i $(\mathcal{N}, \Lambda)$ oznacza, że zachodzi jedno z poniższych.

1. Jest Σ-iterat $\mathcal{P}$ dla $\mathcal{M}$ taki, że dla pewnego $\beta \leqslant \alpha$, $\mathcal{P}|\beta$ jest Λ-iteratem dla $\mathcal{N}$ i $\Lambda_{\mathcal{P}|\beta} = \Sigma_{\mathcal{P}|\beta}$.

2. Istnieje Λ-iterat $\mathcal{P}$ dla $\mathcal{N}$ taki, że dla pewnego $\beta \leqslant \alpha$, $\mathcal{P}|\beta$ jest Σ-iteratem dla $\mathcal{M}$ i $\Lambda_{\mathcal{P}|\beta} = \Sigma_{\mathcal{P}|\beta}$.

Kluczową różnicą pomiędzy myszkami i hod myszkami jest to, że pierwsze ewoluują wzdłuż hierarchii wielkoliczbowej, a drugie ewoluują wzdłuż Hierarchii Solovaya. W [33] i [36], Sargsyan rozwinął teorię (uwarstwionych - layered) hod myszek która pokrywa modele zdeterminowania poniżej LSA i trochę powyżej. W [50], Steel rozwinął teorię (lbr) hod myszek, która pokrywa wszystkie odcinki początkowe Hierarchii Solovaya poniżej liczby supersilnej. Steel, jednakże, nie skonstruował hod myszek powyżej tych skonstruowanych przez Sargsyana w [36]. Niemniej jednak, Steel zupełnie rozwiązał problem przyrównania dla hod myszek poniżej liczb supersilnych poprzez pokazanie że przyrównanie dla hod myszek zachodzi przy założeniu AD^+ i że nie istnieje model wewnętrzny z liczbą supersilną.

Definicja 0.12 NIS *oznacza "nie ma modelu wewnętrznego z liczbą supersilną" i* NWLW *oznacza "nie ma modelu wewnętrznego z liczbą Woodina będącą granicą liczb Woodina".*

Układy Skierowane, HOD i Generacja

Załóżmy, że $(\mathcal{P}, \Sigma)$ jest hod parą. Powiemy że $(\mathcal{Q}, \Lambda)$ jest iteratem $(\mathcal{P}, \Sigma)$ jeśli $\mathcal{Q}$ jest Σ-iteratem $\mathcal{P}$ i $\Lambda = \Sigma_{\mathcal{Q}}$. Przyrównanie implikuje że zbiór iteratów $(\mathcal{P}, \Sigma)$ tworzy układ skierowany. Ściślej, mając dwa iteraty $(\mathcal{P}, \Sigma)$, $(\mathcal{Q}, \Lambda)$ i $(\mathcal{R}, \Psi)$, połóżmy $(\mathcal{Q}, \Lambda) \leqslant^{(\mathcal{P},\Sigma)} (\mathcal{R}, \Psi)$ jeśli $\mathcal{R}$ jest Λ-iteratem $\mathcal{Q}$. Z przyrównania wynika, że $\leqslant^{(\mathcal{P},\Sigma)}$ jest skierowany. Okazuje się, że zanurzenia iteracyjne $\pi_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, $\pi_{\mathcal{P},\mathcal{R}} : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ i $\pi_{\mathcal{Q},\mathcal{R}} : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ komutują, tzn., $\pi_{\mathcal{P},\mathcal{R}} = \pi_{\mathcal{Q},\mathcal{R}} \circ \pi_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$. Niech zatem $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{P}, \Sigma)$ będzie granicą skierowaną wszystkich iteratów $(\mathcal{P}, \Sigma)$. We wszystkich znanych częściowych wynikach dotyczących Problemu HOD wychodzi, że jeśli $\theta_\alpha < \Theta$ jest wyrazem ciągu Solovaya, to istnieje hod para $(\mathcal{P}, \Sigma)$ taka, że $V^{\mathrm{HOD}}_{\theta_\alpha}$ jest uniwersum $\mathcal{M}_\infty(\mathcal{P}, \Sigma)|\theta_\alpha$. Stwierdzenie orzekające istnienie takiej hod pary

$(\mathcal{P}, \Sigma)$ jest nazwane Generacją (Generation) w [36] i HPC w [50]. Oto aktualne, precyzyjne sformułowanie.

Definicja 0.13 *Załóżmy* $\mathsf{AD}^+ + \mathsf{NIS}$. *Wtedy, jeśli* $A \subseteq \mathbb{R}$ *jest taki, że* A *i* A^c *są Suslina, to jest hod para* $(\mathcal{P}, \Sigma)$ *taka, że* $\mathcal{P}$ *jest przeliczalny,* Σ *jest* ω_1*-strategią dla* $\mathcal{P}$ *i* A *jest definiowalny w* $(HC, \Sigma, \in)$.

Wszystkie znane częściowe rozwiązania Problemu HOD opierają się na częściowych wynikach dotyczących Generacji. W rzeczywistości, Steel pokazał w [50], że zakładając $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}} + \mathsf{NIS} + \mathsf{Generacja}$, Problem HOD ma pozytywne rozwiązanie. W tym sensie, Generacja jest najważniejszym problemem deskryptywnej teorii modeli wewnętrznych.

Hipoteza Mysiego Zbioru

Hipoteza Mysiego Zbioru (Mouse Set Conjecture) orzeka, że Chwytanie Myszek (Mouse Capturing) zachodzi w naturalnych modelach AD^+. Została ona wyodrębniona przez Steela i Woodina w latach 90. Pokazali oni, że zakładając $\mathsf{AD} + \mathsf{V} = \mathsf{L}(\mathbb{R})$, dla $x, y \in \mathbb{R}$, x jest porządkowo definiowalny z y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest w myszce nad y. Ten wynik jest uogólnieniem wielu innych w teorii mnogości i teorii rekursji, charakteryzujących definiowalność w kanonicznych modelach fragmentów teorii mnogości. Przywołajmy twierdzenie Kleenego, że hiperarytmetyczne liczby rzeczywiste to dokładnie te zawarte w $L_{\omega_1^{CK}}$ i twierdzenie Schoenfielda, że liczba rzeczywista jest Δ^1_2 z parametrem będącym przeliczalną liczbą porządkową wtedy i tylko wtedy gdy należy do L.

Chwytanie Myszek jest ostateczną postacią tego typu twierdzeń. Orzeka ono, że dla $x, y \in \mathbb{R}$, x jest porządkowo definiowalny z y wtedy i tylko wtedy gdy x jest myszką nad y. MSC jest zdaniem, że $\mathsf{AD}^+ + \mathsf{V} = \mathsf{L}(\wp(\mathbb{R}))$ implikuje MC. Ważnym jest postawienie MSC w definiowalnym kontekście, jako że w obecności aksjomatu wyboru, porządkowa definiowalność nie jest stabilnym pojęciem definiowalności.

Pokrywanie

Jednym z głównych celów teorii modeli wewnętrznych jest identyfikowanie kanonicznych struktur o własnościach bliskich V. Najbardziej znanym twierdzeniem teg typu jest lemat pokryciowy Jensena (Jensen's covering lemma). Jego słabsza werja orzeka, że jeśli $0^{\#}$ nie istnieje, to L prawidłowo oblicza następniki liczb singularnych. Pracując przy założeniu, że nie ma prawiemyszki z liczbą Woodina, Steel zidentyfikował myszkę K, *model rdzeniowy (the core model)*, który prawidłowo oblicza następniki następniki liczb singularnych. Co więcej, prawidłowo oblicza następniki liczb mierzalnych.

Wyniki o charakterze pokryciowym są używane do kalibracji dolnych ograniczeń siły niesprzeczności zasad kombinatorycznych. Prototypowym przykładem jest to, że PFA implikuje istnienie przedmyszki z liczbą Woodina. To zachodzi, bo w przeciwnym przypadku istniałby model K Steela. Ustalając teraz liczbę singularną κ, $(\kappa^+)^K = \kappa^+$. Jako że $K \vDash \Box_\kappa$ i PFA $\implies \neg\Box_\kappa$, dochodzimy do sprzeczności.

Jednakże, istnienie modelu rdzeniowego K nie może zostać wykazane w ZFC. Program identyfikacji takich struktur pokrywających jest dotąd w dużej mierze otwarty i jego powodzenie zależy od postępu w rozwiązywaniu różnych problemów wymienionych wcześniej.

Indukcja Rdzeniowa

Jak wygląda rozwiązanie IMPr dla zadanej dużej liczby kardynalnej? W obszarze krótkich ekstenderów, dla liczb takich jak supersilne, IMPr ma dość precyzyjne sformułowanie. Pyta się wówczas o konstrukcję modelu postaci $L[\vec{E}]$, który zawiera liczbę supersilną i $\vec{E}$ jest *znakomitym ciągiem ekstenderów (fine extender sequence)* zdefiniowanym w [48, Definicja 2.4]. Można jednak przeprowadzać takie konstrukcje przy założeniu wielu różnych hipotez.

Jak zostało już wspomniane, Neeman rozwiązał IMPr dla liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina, przy założeniu istnienia takiej liczby. Jedna z precyzyjnych i wiarygodnych interpretacji IMPr dokładnie tego dotyczy. To znaczy dla aksjomatu wielkoliczbowego ϕ, zakładając istnienie liczby która być może jest silniejsza ϕ skonstruuj $\mathcal{M} = L[\vec{E}]$ taki że $\mathcal{M} \vDash \exists\kappa\phi(\kappa)$.

Nasza interpretacja IMPr ma źrodła w poglądach Johna Steela na Program Gödla [9]. W skrócie, pomysł polega na rozwinięciu teorii łączącej różne założenia podstawowe takie jak Aksjomaty Forsingowe, Duże Liczby Kardynalne, Aksjomaty Zdeterminowania itd.[10]. Z tego punktu widzenia, IMPr jest mostem pomiędzy różnymi teoriami podstawowymi i IMPr powinien być rozwiązywany przy bardzo różnych założeniach, takich jak PFA czy negacje zasad $\Box$ Jensena. Naszym głównym narzędziem rozwiązywania IMPr w kontekście wolnym od założeń wielkoliczbowych jest Indukcja Rdzeniowa (Core Model Induction) (CMI), technika odkryta przez Woodina i rozwijana przez wielu matematyków w ciągu ostatnich 20-25 lat[11].

Na początku, CMI było postrzegane jako indukcyjna metoda dowodzenia zdeterminowania w modelach takich jak $L(\mathbb{R})$. Celem było dowiedzenie, że $L_\alpha(\mathbb{R}) \vDash$ AD przez indukcję po α. W tym wczesnym okresie, około 1995-2010, metoda ta polegała na znajdowaniu za-

[9] Patrz [49] lub moje wcześniejsze omówienie Programu Steela.

[10] Naszym celem jest uniknięcie dyskusji filozoficznych, ale jeśli mielbyśmy iść w tym kierunku, nazwalibyśmy to podejście do IMPr Programem Steela.

[11] W pewnych kontekstach, teoria K^c też może zostać użyta. Patrz [13]. Jednak rozwiązanie IMPr poprzez teorię K^c w ogólności nie daje takich mostów pomiędzy teoriami podstawowymi. Użycie podejścia z K^c nie połączy na przykład PFA z Hierarchią Solovaya. Patrz Hipoteza 0.14.

wiłych zależności pomiędzy dużymi liczbami kardynalnymi, zbiorami uniwersalnie Baire'a i determinacją[12]. Fundamentalny wysiłek podjęty przez Jensena, Neemana, Martina, Mitchella, Steela i Woodina był, i nadal jest, sercem współczesnego rozwoju CMI. Wymienię, nie wyczerpując tematu, prace o dużym znaczeniu: w większości te, w których dyskutowane są skale i uniwersa gier ([14], [15], [16], [17], [18], [19], [20]), [11], [25], [26], [28], [31], [45]. Zostało też napisanych kilka prac, ktore niejawnie rozwijają powyższą koncepcję CMI. Dla przykładu, czytelnik może zajrzeć do [21], [40] i [43]. Z czasem, CMI coraz bardziej stawała się narzędziem *otrzymywania maksymalnych modeli zdeterminowania* z aksjomatów, które nie mają wielkoliczbowego charakteru.

Przypomnijmy, że Twierdzenie Woodina o Modelu Otrzymanym (Twierdzenie 0.8) znajduje *maksymalny* model zdeterminowania przy założeniu aksjomatu wielkoliczbowego. Maksymalny tutaj oznacza, że wszystkie zbiory zdeterminowane należą do modelu otrzymanego. Celem CMI jest zrobienie tego samego dla innych naturalnych założeń, takich jak aksjomaty forsingowe, reguły kombinatoryczne itd. Załóżmy że T jest naturalną aksjomatyzacją teorii mnogości i że $V \vDash T$. Niech κ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Jeśli $\kappa = \omega$ to niech g będzie trywialnym zbiorem generycznym i, w przeciwnym wypadku, niech g będzie generyczny dla $Coll(\omega, \kappa)$ albo $Coll(\omega, < \kappa)$. W ogólnym sensie, CMI jest indukcyjną metodą dowodzenia, że zbiory liczb rzeczywistych w *maksymalnym* modelu są zdeterminowane. Podczas gdy *maksymalność* jest dość niejasnym pojęciem, celem jest w zasadzie pokazanie, że jeśli Γ jest kolekcją wszystkich zbiorów liczb rzeczywistych, które są dobrze definiowalne w $V[g]$, to $L(\Gamma, \mathbb{R}_g)$ jest modelem AD^+. Każda CMI wyodrębnia swój własny Γ: celem może się okazać pokazanie, że AD^+ zachodzi w $L(\mathbb{R}_g)$, w $L^F(\mathbb{R}_g)$, gdzie F jest pewnym dobrze definiowalnym operatorem, lub po prostu w $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)$. W celu wyjaśnienia, łatwiej jest przyjąć, że ten ostatni jest modelem maksymalnym. Zatem, jednym ze sposobów postrzegania CMI jest następujący.

CMI w κ. Poprzez wykonanie Indukcji Rdzeniowej (CMI) w κ rozumiemy, że dla pewnego $g \subseteq Coll(\omega, \kappa)$, w $V[g]$, dowodzimy że $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g) \vDash \mathsf{AD}^+$.

CMI poniżej κ. Poprzez wykonanie Indukcji Rdzeniowej (CMI) poniżej κ rozumiemy, że dla pewnego $g \subseteq Coll(\omega, < \kappa)$, w $V[g]$, dowodzimy że $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g) \vDash \mathsf{AD}^+$.

Zatem, CMI jest zawsze wykonywana w, lub poniżej pewnej liczby kardynalnej κ, co oznaczamy κ_{cmi}, i jest metodą dowodzenia, że AD^+ zachodzi w modelu *maksymalnym*, który może, ale nie musi, być $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)$, ale dla ułatwienia wyjaśnień możemy założyć że jest to $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)$. Wówczas kładziemy $M_{\mathsf{cmi}} = L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)$. W obu wymienionych wyżej przypadkach cel może być mniej ambitny. Może się zdarzyć, że ktoś by chciał po prostu znaleźć $\Gamma \subseteq \mathsf{uB}_g$ taki, że $L(\Gamma, \mathbb{R}_g)$ jest modelem zdeterminowania o pewnych żądanych własnościach.

[12] Przykładowo, czytelnik może spróbować zrozumieć znaczenie W^*_α w [40].

Cel CMI. Cel CMI jest dwojaki:

1. Pokazać, że $M_{\mathsf{cmi}} \models \mathsf{AD}^+$.
2. Pokazać, że V i M_{cmi} mają tą samą złożoność teoriomnogościową.

O złożoności teoriomnogościowej

Dla danego $W \subseteq V$ chcemy znaleźć sposoby porównywania złożoności teoriomnogościowej W i V. Złożoność teoriomnogościowa może być mierzona poprzez definiowalność. Bogate uniwersa muszą obfitować w definiowalne obiekty. Dla przykładu, jeśli istnieje liczba mierzalna, to $0^\#$ istnieje i jest łatwo definiowalne Π^1_2 formułą. Jak wiadomo $0^\#$ koduje całą teorię L Gödla, zatem $0^\#$ nie istnieje w L.

Złożoność może być też mierzona przez pokrywanie. Jeśli dla pewnego κ, $(\kappa^+)^W = (\kappa^+)^V$ to V nie różni się zbytnio W i można spodziewać się, że wiele kombinatorycznych właściwości κ^+ będzie takich samych w W i V. Na przykład, to się dzieje w przypadku $\square_\kappa$. Jeśli $(\kappa^+)^V = (\kappa^+)^W$ i $W \models \square_\kappa$ to $V \models \square_\kappa$. Poniżej wymienimy sobie trzy różne sposoby formalizowania wspomnianych intuicji.

Metoda 1. Złożoność wielkoliczbowa.

Nieh M będzie maksymalnym modelem zdeterminowania otrzymanym z V. Jednym z naturalnych sposobów[13] stwierdzania, że M ma tą samą złożoność co V, polega na stwierdzeniu, że złożoność wielkoliczbowa V jest reflektowana w M, i bardzo eleganckim sposobem wyrażenia tego jest powiedzenie, że HOD^M, uniwersum dziedzicznie porządkowo definiowalnych zbiorów w M, osiąga odpowiednio duże liczby. Typowym przypuszczeniem, które możemy sformułować w powyższej konwencji jest następujące.

Hipoteza 0.14 *Załóżmy* Aksjomat Forsingu Właściwego *i niech $\kappa \geqslant \omega_2$. Wtedy* $\mathrm{HOD}^{M_{\mathsf{cmi}}} \models$ *"istnieje liczba supersilna", gdzie* CMI *jest wykonywana w κ.*

Mniej ambitnym przypuszczeniem byłoby, że PFA pociąga, że jeśli $g \subseteq Coll(\omega, \kappa)$ jest V-generyczny, to istnieje zbiór liczb rzeczywistych $A \in \mathsf{uB}_g$ taki, że $\mathrm{HOD}^{L(A,\mathbb{R}_g)} \models$ "istnieje liczba supersilna". Wierzymy jednak, że silnejsze przypuszczenie również jest prawdziwe. Można zmienić PFA na dowolny inny aksjomat, który wydaje się być silniejszy od istnienia liczby supersilnej.[14]

---

[13] To, że ten sposób stwierdzania żądanej bliskości jest *naturalny*, jest konsekwencją kilku dekad badania HOD w modelach zdeterminowania. Zobacz: fragment wstępu zatytułowany Problem HOD.

[14] W pewnych przypadkach, pracujemy w $V[g]$ dla $g \subseteq Coll(\omega, \kappa)$ dla pewnego κ. W jeszcze innych, możemy pracować w $V[g]$ dla $g \subseteq Coll(\omega, < \kappa)$. Czy ktoś wykonuje CMI w κ, czy poniżej κ, zależy od hipotezy.

Metoda 2. Deskryptywna złożoność.

Innym sposobem wyrażenia, że maksymalny model zbudowany za pomocą CMI łapie złożoność V polega na stwierdzeniu, że masymalny model osiąga silny stopień hierarchii Solovaya. Następujący problem jest typowy dla tych, które można postawić używając powyższego języka.

Hipoteza 0.15 *Załóżmy* Aksjomat Forsingu Właściwego *i niech* $\kappa \geqslant \omega_2$*. Niech* $g \subseteq Coll(\omega, \kappa)$*. Wtedy istnieje filtr* F *na* $\Theta^{M_{\mathsf{cmi}}}$ *taki, że dla* $\mu = L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)[F] \cap F$ *zachodzi co następuje.*

1. $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)[\mu] \cap \wp(\mathbb{R}) = \mathsf{uB}_g$.
2. $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)[\mu] \vDash \mathsf{AD}_{\mathbb{R}} +$ "*μ jest $\mathbb{R}$-zupełnym normalnym ultrafiltrem na Θ*".
3. $L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)[\mu] \vDash$ "*Dla μ-prawie wszystkich α, α jest największą liczbą Suslina poniżej $\theta_{\alpha+1}$*".

Metoda 3. Pokrywanie.

Trzecią, i prawdopodobnie nalepszą, metodą wyrażenia zachowywania złożoności jest użycie języka pokrywań. Tutaj polega to na tym, że $\Theta^{L(\mathsf{uB}_g, \mathbb{R}_g)}$ jest w pewnym sensie bliska κ^+, ale jak to wyrazić, już nie jest takie jasne. Okazuje się, że wszystkie trzy podejścia są ze sobą powiązane i mogą zostać połączone za pomocą HOD. W celu wyjaśnienia, opiszmy dokładnie w jaki sposób CMI przenosi złożoność z V do M_{cmi}.

Przenoszenie Złożoności (Complexity Preservation) (CP) jest intuicyjnym stwierdzeniem, że V i M_{cmi} mają tą samą złożoność. W wielu obecnych zastosowaniach CMI, z powodu braku koniecznych narzędzi, jesteśmy w stanie pokazać że M_{cmi} tylko częściowo przechwyca złożoność V. Prace (1) i (8) stawiają hipotezę pokryciową która, jeśli jest prawdziwa, ustanowi CP w obszarze krótkich esktenderów (tj. zakłądając NLE).

Metodologia CMI

Metodologia CMI sprzed Prac (1) i (8) pokazywania CP prowadzi przez zasadę pokryciową wykorzystującą $\mathrm{HOD}^{M_{\mathsf{cmi}}}$. Prace wymienione wyżej, z wyjątkiem Pracy (8), realizują ogólne pomysły nasuwające się podczas działania w różnych kontekstach. W Pracy (8) jest wtedy pokazane, że aby wyjść poza obszar LSA potrzebna jest nowa metodologia. Później opiszę to wszystko w większych szczegółach. Teraz, przedstawię metodologię ogólną.

Przypomnijmy, że przy założeniu zdeterminowania, Θ jest zdefiniowana jako najmniejsza liczba porządkowa nie będąca surjektywnym obrazem zboru liczb rzeczywistych. Połóżmy $\Theta = \Theta^{M_{\mathsf{cmi}}}$ i $\mathcal{H}^- = \mathrm{HOD}^{M_{\mathsf{cmi}}}|\Theta$. Aby zdefiniować wspomnianą zasadę pokryciową, potrzebujemy rozszerzyć $\mathcal{H}^-$ do modelu $\mathcal{H}$ w którym Θ jest największą liczbą kardynalną. Jest to standardowa konstrukcja w teorii modeli wewnętrznych. Niech $\mathcal{H}$ będzie po prostu sumą wszystkich *hod myszek* rozszerzających $\mathcal{H}^-$, których przeliczalne podmodele mają strategie iteracji w M_{cmi}. To zdanie może być zagadkowe dla niewtajemniczonego czytelnika. Okazuje się, że w wielu sytuacjach możliwe jest opisanie $\mathcal{H}$ bez odwoływania się do obiektów teorii modeli wewnętrznych.

Tutaj mamy jeden przykład. Następujące podejście będzie używane podczas naszej prezentacji metodologii CMI.

Notacja: Załóżmy, że κ jest mierzalna i załóżmy że wykonujemy CMI poniżej κ. Niech $j : V \to M$ będzie pewnym nietrywialnym zanurzeniem elementarnym z $\mathrm{crit}(j) = \kappa$. Niech $h \subseteq Coll(\omega, < j(\kappa))$, $g = h \cap Coll(\omega, < \kappa)$ i $j^+ : V[g] \to M[h]$.

Ponadto, załóżmy że udało nam się pokazać $\sup(j[\Theta]) < j(\Theta)$[15]. Kładąc $\nu = \sup(j[\Theta])$, niech $\mathcal{C}(\mathcal{H}^-)$ będzie zbiorem wszystkich $A \subseteq \Theta$ takich że $j(A) \cap \nu \in j(\mathcal{H}^-)$. Wtedy $\mathcal{H}$ jest przechodnim modelem rozszerzającym $\mathcal{H}^-$ kodowanym przez elementy $\mathcal{C}(\mathcal{H}^-)$[16].

W każym wypadku, traktowanie $\mathcal{H}$ jako kanoniczne rozszerzenie o jedną liczbę kardynalną $\mathcal{H}^-$ to wszystko co czytelnik musi zrobić aby czytać dalej. Kontynuując wedle powyższej notacji, niech teraz

$$\mathsf{UB-Pokrywanie\ (UB-Covering)} : \mathrm{cf}^V(Ord \cap \mathcal{H}) \geqslant \kappa.$$

Wszystkie dostatecznie silne teorie podstawowe implikują negację UB – Pokrywania. Na przykład, słynne twierdzenie Todorcevica mówi, że zakładając PFA, zarówno $\Box_\kappa$ jak i $\Box(\kappa)$ nie zachodzą dla wszystkich $\kappa \geqslant \omega_2$. Ponieważ $\mathcal{H} \vDash \Box_\Theta$, wnioskujemy że PFA pociąga negację UB – Pokrywania.

Jeśli szczęśliwym zbiegiem okoliczności UB – Pokrywanie zachodzi, to tak naprawdę złapaliśmy złożoność V w κ wewnątrz M_{cmi} w najlepszy możliwy sposób poprzez konstrucję kanonicznego obiektu, który prawidłowo oblicza następnik κ. Osiągnięcie UB – Pokrywania jest więc preferowanym celem CMI i główną ideą stojącą za Metodą 3.

Jeśli UB – Pokrywanie nie zachodziło, to metodologia CMI poprzedzająca Pracę (8) była oparta albo na Metodzie 1, albo Metodzie 2 pokazywania, że złożoność V jest dalej zachowywana w M_{cmi}. Robi się to w zasadzie tak samo, i streścimy to podejście zakładając, że naszym celem złapanie siły wielkoliczbowej V (tj. celem będzie użycie Metody 1).

[15] Ten warunek zachodzi dość często

[16] Ustalmy funkcję pary $\pi : \Theta^2 \to \Theta$. Dla danego $A \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{H}^-)$ mówimy że A jest kodem jeśli $M_A = (\Theta, E_A)$ jest dobrze ufundowanym modelem, gdzie $E_A \subseteq \Theta^2$ jest dany przez $(\alpha, \beta) \in E_A \leftrightarrow \pi(\alpha, \beta) \in A$. Jeśli $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^-)$ jest kodem, to niech $\mathcal{M}_A$ będzie kolapsem M_A. Wtedy $\mathcal{H}$ jest sumą modeli postaci $\mathcal{M}_A$.

Argument używany do pokazywania, że $\mathcal{H}$ ma duże liczby kardynalne, wygląda następująco. Wybierzmy aksjomat wielkoliczbowy ϕ, o którym z technicznych powodów zakładamy, że jest Σ_2-formułą. Załóżmy że $\mathcal{H} \vDash \forall\gamma\neg\phi(\gamma)$. Dotychczas, we wszystkich zastosowaniach CMI, fakt że

$\phi - \mathsf{Minimalność}$ ($\phi - \mathsf{Minimality}$) : $\mathcal{H} \vDash \forall\gamma\neg\phi(\gamma)$
i
$\neg$ $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywanie}$: $\mathrm{cf}^V(\mathcal{H} \cap Ord) < \kappa$

zachodzą, był wykorzystywany do dowodzenia, że jest zbiór uniwersalnie Baire'a spoza $\mathsf{uB_g}$, co jest jawną sprzecznością. Ten zbiór uniwersalnie Baire'a jest strategią iteracji Σ dla $\mathcal{H}$ indukowaną przez $j \restriction \mathcal{H}$. Σ ma *własność realizowalności (realizability property)*, *własność maksymalności (maximality property)* i *własność uB* opisane niżej.

Własność Realizowalności. Załóżmy że $\mathcal{T} \in M[h]$ jest iteracją $\mathcal{H}$ poprzez Σ o długości przeliczalnej i granicznej. Wtedy $\Sigma(\mathcal{T}) = b$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje zanurzenie elementarne $\sigma : \mathcal{M}_b^{\mathcal{T}} \to j(\mathcal{H})$ z własnością
$$j \restriction \mathcal{H} = \sigma \circ \pi_b^{\mathcal{T}}.$$

Własność Maksymalności. W $M[h]$, $j(\mathcal{H})$ jest granicą skierowaną wszystkich przeliczalnych iteratów $\mathcal{H}$ poprzez Σ.

Własność uB. W $M[h]$, zbiór liczb rzeczywistych kodujący Σ jest uB.

Własność Maksymalności i Własność uB pociągają, że w $M[h]$, $\Sigma \in j^+(M_{\mathsf{cmi}})$ i Σ indukuje surjekcję $f : \mathbb{R}_h \to j(\Theta)$, co jest sprzecznścią. Ponieważ zakładaliśmy, że $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywanie}$ nie zachodzi, powyższa sprzeczność implikuje $\mathcal{H} \vDash \exists\gamma\phi(\gamma)$.

Przed Pracą (8), panowała filozofia że nawet jeśli negacja $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywania}$ pociąga, że w istotny sposób V jest bardziej skomplikowane niż M_{cmi}, metodologia zaprezentowana powyżej będzie działać dla wszystkich dużych liczb w obszarze krótkich ekstenderów, co doprowadziłoby do dowodów hipotez takich jak Hipoteza 0.14 i Hipoteza 0.15. Wszystkie prace wymienione wyżej rozwijają tą metodologię i pokazują, że może być ona wykorzytana do poziomu LSA i nieco wyżej. Praca (8) w kluczowy sposób pokazuje ograniczenia tej metodologii. Poniżej wyjaśniamy wkład każdej pracy w kolejności według czasu publikacji, zaczynając od najwcześniejszej.

Streszczenia Prac (1)-(6) i (8).

Praca (6): Grigor Sargsyan and Nam Trang, Non-tame mouse from tame failures of the Unique Branch Hypothesis, Canad. J. Math. 66 (2014).

Hipoteza Gałęzi Jednoznacznej (Unique Branch Hypothesis) (UBH) została wprowadzona w pionierskiej pracy Martina i Steela *Iteration Trees* (patrz [25]). Orzeka ona, że każde drzewo iteracji na V o granicznej długości, używające ekstenderów $2^{\aleph_0}$-zamkniętych w modelach z których zostały wybrane, ma jednoznaczną, dobrze ufundowaną gałąź. Zakładając UBH można rozwiązać IMPr dla dowolnej dużej liczby w obszarze krótkich ekstenderów metodami z [28]. Ściślej, jeśli na przykład UBH zachodzi i istnieje liczba superzwarta, to teoria rozwinięta w [28] a w szczególności w [28, Rozdział 12] może zostać użyta do konstrukcji modelu postaci $L[\vec{E}]$ posiadającego liczbę supersilną. Z tego powodu, UBH odgrywa ważną rolę w teorii mnogości, szczególnie w teorii modeli wewnętrznych.

Niestety, Woodin pokazał, w nieopublikowanej pracy, że niewielkie wzmocnienie UBH jest fałszywe. Zakładając istnienie liczby superzwartej, Woodin skonstruował drzewo iteracji $\mathcal{T}$ na V długości ω, takie że

1. pierwszy ekstender użyty w $\mathcal{T}$ nie jest ω-zamknięty w V,
2. wszystkie inne ekstendery są $2^{\aleph_0}$-zamknięte w modelach z których zostały wybrane,
3. $\mathcal{T}$ ma co najmniej dwa dobrze ufundowane modele.

Przykład Woodina sugeruje, że UBH może być fałszywa. Z drugiej strony, Steel, w [41] udowodnił, że UBH zachodzi w myszkach, co pokazuje że UBH, tak samo jak Sealing, jest problemem testowym dla IMP. Jeśli jakaś duża liczba implikuje $\neg$UBH, wówczas teoria modelu wewnętrznego dla tej liczby musi się bardzo różnić od teorii jaką mamy obecnie.

W [46], Steel zainicjował badanie siły wielkoliczbowej $\neg$UBH. W szczególności, pokazał że jeśli UBH nie zachodzi to istnieje model wewnętrzny z ω liczbami Woodina. W Pracy (6), Nam Trang i Ja rozszerzyliśmy wynik Steela pokazując, że jeśli UBH nie zachodzi dla *oswojonych (tame)* drzew, to istnieje model wewnętrzny z liczbą Woodina δ i $\delta + 1$-silną liczbą $\kappa < \delta$. Następujące jest Twierdzeniem Głównym (Main Theorem), Twierdzeniem 0.1, w Pracy (6).

Twierdzenie 0.16 (Twierdzenie Główne w Pracy (6)) *Załóżmy że istnieje klasa właściwa liczb silnych i* UBH *nie zachodzi dla oswojonych drzew. Wtedy w generycznym rozszerzeniu V za pomocą zbioru, istnieje przechodni model wewnętrzny M taki że* $\mathsf{Ord}, \mathbb{R} \subseteq M$[17] *i* $M \vDash \mathsf{AD}^+ + \theta_0 < \Theta$. *W szczególności, istnieje nieoswojona myszka (non-tame mouse).*

[17]Tutaj $\mathbb{R}$ są liczbami rzeczywistymi z generycznego rozszerzenia.

Oswojone drzewa są zdefiniowane w Definicji 5.1 w pracy (6). Załóżmy, że κ jest najmniejszą liczbą silną, która reflektuje (reflects) zbiór liczb silnych i załóżmy że $\lambda > \kappa$ jest najmniejszą liczbą silną. Drzewo iteracji $\mathcal{T}$ jest oswojone, jeśli jego wszystkie ekstendery mają punkt krytyczny $> \lambda$. Tak jak UBH, UBH dla oswojonych drzew wystarczy do rozwiązania IMPr.

Głównym wkładem Pracy (6) do CMI jest adaptacja CMI do kontekstu UBH. W pracy wykonana jest CMI w κ, gdzie κ jest najmniejszą liczbą silną reflektującą zbiór liczb silnych. Trudność w wykonaniu CMI w tym kontekście polega na tym, że nie jest oczywiste, że z naych założeń wynika negacja $\mathsf{UB-Pokrywania}$, a zatem, pewna pomysłowość jest potrzebna do zaimplementowania metodologii CMI w celu otrzymania częściowych wyników zachowywania złożoności. W pracy tak naprawdę pokazujemy, że $M_{\mathsf{cmi}} \vDash \theta_0 < \Theta$.

Praca (5): Grigor Sargsyan, Non-tame mouse from a failure of square at a singular strong limit, J. Math. Log. 14 (2014), no. 1.

Hipoteza 0.14 i spokrewnione hipotezy są świętymi Graalami teorii modeli wewnętrznych. Jako że PFA pociąga negacje kwadratów dla wszystkich liczb nieprzeliczalnych, jednym ze sposobów natarcia na Hipotezę 0.14 i podobne problemy jest pokazanie, że już negacja kwadratu dla singularnej liczby silnie granicznej ma dużą siłę niesprzeczności. Ponieważ kwadraty są jednymi z najbardziej badanych tematów w teorii mnogości, następujący problem ma taką samą wagę co Hipoteza 0.14.

Hipoteza 0.17 *Załóżmy, że κ jest singularną liczbą silnie graniczną, taką że $\Box_\kappa$ nie zachodzi. Wtedy dla pewnej $\mu < \kappa$ i $g \subseteq Coll(\omega, \mu)$, $\mathrm{HOD}^{M_{\mathsf{cmi}}} \vDash$ "istnieje liczba supersilna", gdzie CMI jest wykonywana w μ.*

Jak w wielu zastosowaniach CMI, pierwszy krok w kierunku Hipotezy 0.17 został zrobiony przez Johna Steela w [40], gdzie Steel pokazał, że Hipoteza 0.17 pociąga zachodzenie AD w $L(\mathbb{R})$. Ponieważ Steel pracował zakładając PFA[18], μ może być każdą liczbą taką że $\mu^{\omega_1} = \mu$. Bez PFA, nie jest od razu oczywiste, czym μ powinno być. Tak jak Praca (6), Praca (5) wskazuje takie μ i pokazuje, że $M_{\mathsf{cmi}} \vDash \theta_0 < \Theta$, gdzie CMI jest wykonywana w μ. Następujące jest Twierdzeniem Głównym, Twierdzeniem 0.1, w Pracy (5).

Twierdzenie 0.18 (Twierdzenie Główne w Pracy (5)) *Załóżmy, że $\neg\Box_\kappa$ zachodzi dla pewnej singularnej liczby silnie granicznej κ. Wtedy istnieje przechodni model wewnętrzny M taki że $\mathsf{Ord}, \mathbb{R} \subseteq M$ i $M \vDash \mathsf{AD}^+ + \theta_0 < \Theta$. W szczególności, istnieje nieoswojona myszka.*

Na stronie 2 w [40], Steel pisze co następuje:

[18]Które pociąga, że wszystkie koherentne ciągi mają współkońcowość ω_1.

...ale dowód "kondensacji gałęziowej" (branch condensation) w sekcji 5.2 w [21] nie daje się zaadaptować do naszej sytuacji w żaden bezpośredni sposób. To jest moment, w którym Ketchersid zakłada pewne dodatkowe własności swojego generycznego zanurzenia (głównie, że jego obcięcie do liczb porządkowych jest w V). Te własności nie powinny być potrzebne i "właściwy" argument w jego sytuacji, prawdopodobnie mógłby też pomóc w naszej.

Udowodnienie "kondensacji gałęziowej" jest głównym wkładem Twierdzenia 0.18. Metody rozwinięte w Pracy (5) mogą tak naprawdę być użyte do dowodu, że $M_{\mathsf{cmi}} \vDash \mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ (zakładając $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$). Niestety, wbrew oczekiwaniom, nie wystarczają do udowodnienia $M_{\mathsf{cmi}} \vDash \Theta_{\mathsf{reg}}$. Prace (3), (4), (7), (8) i (9) rozwijają narzędzia w celu udowodnienia $M_{\mathsf{cmi}} \vDash \Theta_{\mathsf{reg}}$ przy założeniu różnych hipotez. Niemniej jednak, wygląda na to, że następujący problem jest otwarty.

Hipoteza 0.19 *Załóżmy, że* $\neg\square_\kappa$ *zachodzi dla pewnej singularnej liczby silnie granicznej* κ*. Wtedy istnieje przechodni model wewnętrzny* M *taki że* $\mathsf{Ord}, \mathbb{R} \subseteq M$ *i* $M \vDash \Theta_{\mathsf{reg}}$.

Biorąc pod uwagę obszerną literaturę na temat Θ_{reg}, rozwiązanie powinno być w naszym zasięgu. Na przykład, oprócz Prac (3), (4), (7), (8) i (9), [52] i [1] pokazują że $M \vDash \Theta_{\mathsf{reg}}$ przy podobnych założeniach do tych w Hipotezie 0.19. Praca (4) wykazuje Hipotezę 0.19 przy założeniu, że κ jest liczbą mierzalną.

Praca (4): Grigor Sargsyan, Covering with universally Baire functions, Adv. Math. 268, (2015).

Głównym celem Pracy (4) jest znalezienie siły negacji Hipotezy Iterowalności (Iterability Hypothesis) dla K^c. Przypomnijmy, że IMPr szuka modeli postaci $L[\vec{E}]$, tj. myszek, zawierających duże liczby kardynalne. Klasyczny sposób konstrukcji takich modeli wiedzie przez konstrukcje *wsparte (backgrounded)*. Intuicyjnie, konstrukcja indukcyjnie wybiera ekstendery z uniwersum i indeksuje je w $\vec{E}$ tak, żeby model $L[\vec{E}]$ był *prawiemyszką*[19].

Sciślej (choć wciąż bardziej intuicyjnie), te konstrukcje indukcyjnie tworzą ciąg prawiemyszek $(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{N}_\alpha : \alpha < \eta)$ i ciąg ekstenderów $(F_\alpha : \alpha < \eta)$ takie, że spełnione są następujące warunki.

1. Jeśli F_α jest zdefiniowany, to $\mathcal{N}_\alpha = (\mathcal{M}_\alpha, F_\alpha \cap \mathcal{M}_\alpha)$ i $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ jest *rdzeniem (core)* $\mathcal{N}_\alpha$.

[19]Przypomnijmy, że aby $L[\vec{E}]$ był prawiemyszką, $\vec{E}$ musi spełniać różne warunki wymienione w [48, Definicja 2.4].

2. Jeśli F_α nie jest zdefiniowany, to $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$ i $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ jest rdzeniem $J_1[\mathcal{N}_\alpha]$ gdzie $J[a]$ jest *rudymentarnym (rudimentary)* domknięciem a[20].

3. F_α jest zdefiniowany dla wszystkich α takich, że istnieje ekstender F z własnością że $(\mathcal{M}_\alpha, F \cap \mathcal{M}_\alpha)$ jest prawiemyszką.

Główną trudnością w przeprowadzeniu naszej konstrukcji jest przejście z $\mathcal{N}_\alpha$ do $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ w przpyadku 1 powżyej. Tutaj, *rdzeń*, zdefiniowany w [48, Rozdział 2.3], jest czymś w rodzaju otoczki Skolema używającej funkcji Skolema definiowalnych w $\mathcal{N}_\alpha$. Jednym z najgłębszych twierdzeń w teorii modeli wewnętrznych jest to, że operacja rdzenia zastosowana do $\mathcal{N}_\alpha$ zachowuje się przyzwoicie, pod warunkiem że jeśli $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{N}_\alpha$ gdzie $\mathcal{P}$ jest przeliczalny, $\mathcal{P}$ ma $\omega_1 + 1$-stategię iteracji. Czytelnik może się więcej dowiedzieć zaglądając do [48, Rozdział 6] (w szczególności, [48, Definicja 6.3 i Hipoteza 6.5]) i [13]. Poniżej znajduje się nieco przeformułowana, bardziej przyjazna dla czytelnika wersja [48, Hipotezy 6.5].

Hipoteza 0.20 (Hipoteza Iterowalności dla K^c) *Załóżmy, że $\mathcal{N}$ jest prawiemyszką pojawiającą się w K^c-konstrukcji i $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ jest elementarnym włożeniem, gdzie $\mathcal{P}$ jest przeliczalny. Wtedy $\mathcal{P}$ ma $\omega_1 + 1$-strategię iteracji.*

Z powodu [13, Twierdzenia 01], pokazującego jak rozwiązać IMPr dla liczb supersilnych przy założeniu PFA i Hipotezy 0.20, udowodnienie Hipotezy 0.20 jest jednym z głównych problemów teorii modeli wewnętrznych. Podchodzę tutaj do tego dość liberalnie. Jest nieskończenie wiele rodzajów K^c-konstrukcji różniących się od siebie warunkami nałożonymi na F. K^c-konstrukcja z [48, Rozdział 6] i K^c-konstrukcja z [13] są trochę inne. W pierwszej, od F wymaga się mierzenia w zasadzie wszystkich podzbiorów punktu krytycznego, podczas gdy w [13], istnienie F ma być zaświadczone przez pewne dostatecznie domknięte otoczki Skolema. Niemniej jednak, mając Hipotezę 0.20 dla pewnej K^c-kontrukcji, odpowiednia wersja [13, Twierdzenia 01] może zostać do niego zastosowana, skutkując rozwiązaniem IMPr dla liczby supersilnej przy założeniu co najmniej PFA.

Mając powyższe, interesującym wydaje się być dociekanie siły niesprzeczności negacji Hipotezy Iterowalności dla K^c. To jest cel główny Pracy (4), której główne twierdzenie postuluje trzy alternatywy. Najpierw zostaje postawiona hipoteza, **Hipoteza UB-Pokrywania (UB-Covering Conjecture)**. Intuicyjnie, polega ona na tym, że to co nazwaliśmy wcześniej $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywaniem}$ zachodzi w obszarze krótkich ekstenderów.

Hipoteza 0.21 (Hipoteza UB-Pokrywania, Praca (4)) *Załóżmy, że η jest mierzalną granicą liczb silnych, które reflektują A, gdzie $A = \{\nu < \eta : \nu \text{ jest silna}\}$. Wtedy zachodzi jedno z poniższych:*

1. *Pewna symetryczna, hybrydowa K^c-konstrukcja poniżej η jest zbieżna.*

2. *Pokrywanie dolnymi częściami zachodzi w η.*

[20] Dla uproszczenia, można traktować J_1 jako L_1. Patrz [38, Rozdział 1].

3. *Istnieje myszka z liczbą supersilną.*

Pokrywanie dolnymi częściami jest podobne do tego, co nazwaliśmy $\mathsf{UB}-\mathsf{Pokrywaniem}$. Symetryczne K^c-konstrukcje, to konstrukcje wykonywane względem pewnej przyzwoitej strategii iteracji pojawiającej się w symetrycznym rozszerzeniu. Zatem, taka K^c-konstrukcja skutkuje hybrydową prawiemyszką. Następujące twierdzenie jest głównym twierdzeniem w Pracy (4).

Twierdzenie 0.22 (Twierdzenie Główne w Pracy (4)) *Załóżmy że η jest mierzalną granicą liczb silnych, które reflektują A, gdzie $A = \{\nu < \eta : \nu \text{ jest silna}\}$. Wtedy zachodzi jedno z poniższych:*

1. *Pewna symetryczna, hybrydowa K^c-konstrukcja poniżej η jest zbieżna.*

2. *Pokrywanie dolnymi częściami zachodzi w η.*

3. *Istnieje przechodni model wewnętrzny zawierający liczby rzeczywiste, porządkowe i spełniający Θ_{reg}.*

Intuicyjnym przesłaniem [13, Twierdzenia 01] jest głównie to, że jeśli nie ma modelu wewnętrznego z liczbą supersilną, lub Hipoteza Iterowalności K^c nie zachodzi, to K^c-konstrukcje będą skutkować modelami obliczającymi η^+ prawidłowo dla wielu η, w tym η mierzalnych. Z kolei Hipoteza 0.21 mówi w zasadzie, że nawet jeśli Hipoteza Iterowalności dla K^c nie zachodzi, to zajdzie pokrywanie innego typu, mianowicie Pokrywanie dolnymi częściami (które, jak mówiliśmy, przypomina $\mathsf{UB}-\mathsf{Pokrywanie}$). Główne Twierdzenie w Pracy (4) rozwiązuje problem, ale tylko poniżej Θ_{reg}. Twierdzenie 0.3 i Wniosek 0.4 w pracy (4) pokazują, jak użyć Twierdzenia 0.22 do pokazania, że jeśli η jest taka jak w sformułowaniu Twierdzenia 0.22 i $\square_\eta$ nie zachodzi, to istnieje przechodni model wewnętrzny zawierający liczby rzeczywiste i porządkowe, oraz spełniający Θ_{reg}.

Twierdzenie 0.22 jest pierwszym zastosowaniem CMI na poziomie Θ_{reg}. Jego głównym wkładem do teorii CMI są narzędzia rozwijane w celu otrzymywania modeli Θ_{reg}. Jeden z kluczowych, technicznych pomysłów rozwiniętych w Pracy (4) jest podany w Definicji 11.14 w pracy (4). Pojęcie wprowadzone w tej definicji, którym jest własność kondensacji dla włożenia elementarnego, było używane we wszystkich zastosowaniach CMI osiągających Θ_{reg}.

Praca (3): Grigor Sargsyan and Nam Trang, Tame failures of the unique branch hypothesis and models of $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}+\Theta$ is regular, Journal of Mathematical Logic, 16 (2016).

Celem Pracy (3) jest uogólnienie tego, co pojawiło się w Pracy (6) w celu otrzymania modelu Θ_{reg}. Użyta jest w niej metodologia z Pracy (4), i w szczególności adaptuje własność kondensacji zanurzeń odkrytą w Pracy (4) do kontekstu UBH. Następujące jest głównym twierdzeniem w Pracy (3).

Twierdzenie 0.23 (Główne Twierdzenie w Pracy (3)) *Załóżmy, że istnieje klasa właściwa silnych liczb kardynalnych, oraz że zachodzi negacja* UBH *dla oswojonych drzew. Wtedy w rozszerzeniu* V *o zbiór generyczny istnieje przechodni model wewnętrzny* M *taki, że* $\mathsf{Ord}, \mathbb{R} \subseteq M$[21] *i* $M \vDash \Theta_{\mathsf{reg}}$.

Praca (3) różni się jednak znacząco od innych znanych zastosowań CMI. Niech κ liczbą silną reflektującą liczby silne. Jak już zostało wspomniane w części poświęconej Pracy (6), CMI jest wykonywana poniżej κ, ale co najważniejesze, nie wiadomo czy zachodzi negacja $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywania}$ w κ, podczas gdy dokładnie to zostało użyte w Pracy (4) w celu udowodnienia wszystkich ważnych własności zanurzeń elementarnych. W naszym obecnym przypadku, potrzebujemy takich własności dla zanurzeń elementarnych których punktem krytycznym jest κ.

Niemniej jednak, w Pracy (3) (patrz Definicja 3.12 i Twierdzenie 3.13 w Pracy (3)) rozwijana jest potrzebna maszyneria z Pracy (4) bez zakładania, że $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywanie}$ nie zachodzi. Zatem, głównym wkładem Pracy (3) do teorii CMI jest wspomniana maszyneria potrzebna do dowodzenia ważnych własności kondensacyjnych odkrytych w Pracy (4), bez używania negacji $\mathsf{UB} - \mathsf{Pokrywania}$.

Praca (2): Grigor Sargsyan, Translation procedures in descriptive inner model theory. Foundations of mathematics, 205-223, Contemp. Math., 690, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

Obecnie, większość prac o CMI dowodzi fragmentów PC[22] używając Metody 2. Celem jest pokazanie, że pewne interesujące założenia teoriomnogościowe pociągają istnienie kanonicznego modelu pewnej teorii z Hierarchii Solovaya. Główne Twierdzenia w Pracach (3) i (4) są tego typu (Twierdzenie 0.23 i Twierdzenie 0.22), zaś teorią z Hierarchii Solovaya jest Θ_{reg}. Dla kontrastu, Główne Twierdzenia w Pracach (5) i (6) używają języka Metody 1, to znaczy w sposób niejawny ich konkluzje pociągają istnienie modeli wewnętrznych z dużymi liczbami kardynalnymi (Twierdzenie 0.18 i Twierdzenie 0.16).

Głównym powodem, dla którego Metoda 1 jest obecnie mniej popularna jest to, że związek między Hierarchią Wielkoliczbową i Hierarchią Solovaya nie jest jeszcze dobrze pojęty. Wcześniejsze twierdzenia Steela i Woodina pokazują pewne zależności pomiędzy tymi hierarchiami. Dla przykładu, pokazali następujące.

[21] Tutaj $\mathbb{R}$ są liczbami rzeczywistymi z rozszerzenia generycznego.

[22] Zachowywanie Złożoności (Preservation of Complexity)

Twierdzenie 0.24 (Steel-Woodin, [47]) *Załóżmy, że $V \vDash \mathsf{AD}^+ + \theta_0 < \Theta$. Wtedy istnieje nieoswojona myszka, i tak naprawdę, istnieje model wewnętrzny M będący klasą właściwą, w którym jest liczba kardynalna λ będąca granicą liczb Woodina i pewna liczba kardynalna jest $< \lambda$-silna.*

Twierdzenie 0.25 (Steel-Woodin, [47]) *Załóżmy, że $V \vDash \mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$. Wtedy istnieje model wewnętrzny M będący klasą właściwą, w którym jest liczba kardynalna λ będąca granicą liczb Woodina oraz granicą liczb $< \lambda$-silnych.*

Podobny wynik został uzyskany przez Erica Clossona w [3] dla teorii $\mathsf{AD}^+ + \theta_{\omega_1} < \Theta$. W [57], Yizheng Zhu udowodnił, że każdy model zdeterminowania, który nie zawera właściwie modelu Θ_{reg} jest modelem otrzymanym z pewnej prawiemyszki będącej klasą właściwą. W przeciwieństwie do innych wyników, twierdzenie Zhu nie podaje domyślnego opisu struktury wielkoliczbowej jego prawiemyszki. Zatem, następujący problem pozostaje otwarty.

Problem 0.26 *Jaka dokładnie jest siła wielkoliczbowa Θ_{reg}?*

Ponieważ nie wiemy, jakie liczby kardynalne odpowiadają teoriom z Hierarchii Solovaya, to obecnie unika się mówienia o liczbach kardynalnych przy zastosowaniach CMI. To jest jednak tylko tymczasowe, jako że tłumaczenie poziom po poziomie między Hierarchią Solovaya i Hierarchią Wielkoliczbową jest jednym z centralnych zagadnień w CMI.

Główna procedura użyta w dowodach twierdzeń wymienionych wyżej (Twierdzenie 0.24 i Twierdzenie 0.25) jest znana pd nazwą *tłumaczenia (translation procedure)*. Dla danej hybrydowej prawiemyszki, takiej jak hod myszka, tłumaczenie przekłada jej predykat strategii na predykat ekstendera w taki sposób, że złożoność struktury jest zachowywana. Zachowywanie jest dowodzone porzez pokazanie, że otrzymany model nowej myszki jest taki sam jak wyjściowej myszki hod.

> **Tłumaczenie:** Dla danej myszki hod $\mathcal{M}$, tłumaczenie *przekłada* $\mathcal{M}$ na myszkę $\mathcal{N}$ w taki sposób, że jeśli λ jest granicą liczb Woodina z $\mathcal{M}$ i $g \subseteq Coll(\omega, < \lambda)$ jest $\mathcal{M}$-generyczny to modele otrzymane $\mathcal{M}[g]$ i $\mathcal{N}[g]$ są takie same.

Głównym wkładem Pracy (2) jest nowa procedura tłumaczenia, upraszczająca wele argumentów z prac wymienionych wcześniej. Nowa procedura tłumaczenia zwalnia z używania parametru rzeczywistego, zapoczątkowanego w [47]. Usunięcie tego parametru pozwala na usprawnioną organizację tłumaczeń, które mogą być przeprowadzane wewnątrz dowolnej hod myszki spełniającej pewne własności (pierwszego rzędu). To mocno kontrastuje z poprzednimi pracami o tłumaczeniach, które były przeprowadzane w bardzo ostrożnie dobranych hod myszkach. Następujące jest głównym Twierdzeniem w Pracy (2), i jego celem jest odpowiedź na pytanie Trevora Wilsona.

Twierdzenie 0.27 *Załóżmy, że κ jest tłumaczalną (translatable) strukturą. Wtedy, w κ, istnieje prawiemyszka $\mathcal{M}$ będąca klasą właściwą, która zawiera klasę właściwą liczb Woodina i liczbę silną.*

Tłumaczalne struktury są wprowadzone w Definicji 1.7 w Pracy (2). Jak już zostało wspomniane, tłumaczalność jest własnością pierwszego rzędu. Następnie, praca odpowiada na pytanie Trevora Wilsona.

Pytanie 0.28 (Wilson) *Załóżmy, że istnieje klasa właściwa liczb Woodina. Załóżmy, że klasa*

$$S = \{\lambda : \lambda \textit{ jest granicą liczb Woodina i model otrzymany w } \lambda \textit{ spełnia } \mathsf{AD}^+ + \theta_0 < \Theta\}$$

jest stacjonarna. Czy istnieje wtedy model przechodni $\mathcal{M}$ spełniający ZFC, taki że $Ord \subseteq \mathcal{M}$ i $\mathcal{M}$ zawiera klasę właściwą liczb Woodina i liczbę silną?

Praca (2) pokazuje, że tak.

Twierdzenie 0.29 *Załóżmy, że istnieje klasa właściwa liczb Woodina. Załóżmy ponadto, że klasa S, zdefiniowana powyżej, jest stacjonarna. Wtedy istnieje model przechodni $\mathcal{M}$ spełniający ZFC taki, że $Ord \subseteq \mathcal{M}$ i $\mathcal{M}$ zawiera klasę właściwą liczb Woodina i liczbę silną.*

Praca (1): Grigor Sargsyan, Covering with Chang models over derived models, Adv. Math. 384 (2021).

Praca (8): Grigor Sargsyan and Nam Trang, The exact consistency strength of generic absoluteness for universally Baire sets, nadesłana na Forum Sigma, dostępna tutaj.

Głównym celem Pracy (1) jest wprowadzenie następującego udoskonalenia Hipotezy 0.21.

Hipoteza 0.30 (Pokrywanie Modelami Changa) *Załóżmy* NLE[23]*, oraz przypuśćmy, że istnieje nieograniczenie wiele liczb Woodina i liczb silnych. Niech κ będzie granicą liczb Woodina i liczb silnych taką, że albo κ jest mierzalna, albo* $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$*. Wtedy istnieje model przechodni M spełniający* ZFC − Zbiór Potęgowy *taki, że*

1. *$Ord \cap M = \kappa^+$,*

2. *w M istnieje największa liczba kardynalna ν,*

[23] NLE jest technicznym sposobem wyrażenia, że nie ma modelu wewnętrznego z liczbą supersilną.

3. *dla dowolnego $g \subseteq Coll(\omega, <\kappa)$, kładąc $\mathbb{R}^* = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathbb{R}^{V[g\cap Coll(\omega,\alpha)]}$ i $\Gamma^* = \{A^g \cap \mathbb{R}^* : \exists\alpha < \kappa(A \in \Gamma^\infty_{g\cap Coll(\omega,\alpha)})\}$, w $V(\mathbb{R}^*)$,*

$$L(M, \textstyle\bigcup_{\alpha<\nu} \alpha^\omega, \Gamma^*, \mathbb{R}^*) \models \mathsf{AD}.$$

4. *Dodatkowo, jeśli nie ma modelu wewnętrznego z liczbą podzwartą (subcompact cardinal), to*

$$L(M) \models \mathsf{ZFC} + \wp(\nu) = \wp(\nu)^M + \square_\nu.$$

Hipoteza 0.30 pojawia się również w Pracy (8) i jest bardzo umotywowana pracą wykonaną w (8) jak i również pracą wykonaną w [23]. Ogólnym przesłaniem obu prac jest to, że warunki 1 i 2 z Hipotezy 0.21 nie są tak silne, jak przypuszczano. Rozwinę temat tych wyników.

W [23], Paul Larson i Ja,- opierając się na mojej nieopublikowanej jeszcze pracy o modelu Changa, wynikach z [2] i ważnej pracy Woodina [55, Rozdział 9],- dowodzimy następującego twierdzenia (patrz [23, Twierdzenie 1.6]).

Twierdzenie 0.31 (Larson-S.) *Niesprzeczność ZFC i istnienia liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina pociąga niesprzeczność*

$$\mathsf{ZFC} + \aleph_2^\omega = \aleph_2 + \neg\square_{\omega_3} + \neg\square(\omega_3) + \mathsf{MM}^{++}(\mathsf{c})^{24}.$$

Warto zauważyć, że forsujemy teorię wspomnianą w Twierdzeniu 0.31 nad modelem Changa zbudowanym na modelu zdeterminowania, tj. modelem dokładnie tego rodzaju, który został użyty do celów pokryciowych w Hipotezie 0.30.

Uwaga 0.32 *Powodem, dla którego Twierdzenie 0.31 jest ważne, jest przede wszystkim to, że nie wiadomo jak forsować zdania postaci $\neg\square_\kappa + \neg\square(\kappa)$ dla regularnych κ nad niezbyt dużymi liczbami kardynalnymi (takimi jak liczby Woodina będące granicami liczb Woodina) używając konwencjonalnych metod forsingowych. Co ważniejsze, Twierdzenie 0.31 w koniunkcji z [13, Twierdzeniem 0.1] pociąga, że Hipoteza Iterowalności dla K^c (patrz Hipoteza 0.20) może nie być dowodliwa w ZFC, i tak naprawdę, jest fałszywa dla pewnych K^c-konstrukcji, jak na przykład tej użytej w dowodzie [13, Twierdzenia 0.1]. Co więcej, Twierdzenie 0.31 pociąga, że siła negacji Hipotezy Iterowalności dla K^c-konstrukcji użytej w [13, Twierdzeniu 0.1] jest poniżej liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina.*

Oczywiście Uwaga 0.32 pociąga, że warunek 1 w Hipotezie 0.21 wymaga rewizji. Praca (8) wtedy pokazuje, że warunek 2 w Hipotezie 0.21 również wymaga rewizji. Natępujące jest głównym twierdzeniem Pracy (8).

[24] Jako że używamy $\mathbb{P}_{max}$, otrzymujemy $\mathsf{MM}^{++}(\mathsf{c})$ za darmo, powołując się na [55, Rozdział 9].

Twierdzenie 0.33 (S.-Trang, Praca (8)) *Jest niesprzecznym względem istnienia liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina, że zachodzi* Sealing.

Twierdzenie jest też konsekwencją wyników z [34]. Jak już było wspomniane, Sealing ma dramatyczny wływ na IMPr (patrz DychotomiaSealingu), ale Twierdzenie 0.11 omija je, pokazując Sealing w rozszerzeniu generycznym otrzymanym po skolapsowaniu czegoś nieco większego od liczby superzwartej do liczby przeliczalnej.

Niemniej jednak, jak już streściliśmy powyżej, Twierdzenie 0.33 jest wyzwaniem rzuconym metodologii CMI. Przede wszystkim Sealing pociąga, że UB − Pokrywanie nie zachodzi. Tutaj mamy typowy scenariusz.

Załóżmy, że κ jest liczbą mierzalną, $g \subseteq Coll(\omega, < \kappa)$ i zdefiniowaliśmy $\mathcal{H}$, kannicne rozszerzenie $\mathrm{HOD}^{L(\mathsf{uB_g}, \mathbb{R}_g)}$ o jedną liczbę kardynalną. Kładąc $\eta = \mathsf{Ord} \cap \mathcal{H}$ i niech $h \subseteq Coll(\omega, \omega_1)$ będzie $V[g]$-generyczny,

$L(\mathsf{uB}_{g*h}, \mathbb{R}_{g*h}) \vDash$ "istnieje η-ciąg różnych liczb rzeczywistych".

Zakładając Sealing otrzymujemy, że $\eta < \omega_1^{V[g*h]}$ jak przy Sealingu, $L(\mathsf{uB}_{g*h}, \mathbb{R}_{g*h}) \vDash \mathsf{AD}$, i zakładając AD nie ma ω_1-ciągów liczb rzeczywistych. Zatem, w V, $\eta < \kappa^+$, jako że mamy $(\kappa^+)^V = \omega_1^{V[g*h]}$.

Ponieważ Sealing pociąga negację UB − Pokrywania, które jest zwyczajnie wariantem "pokrywania dolnymi częściami" i ponieważ Sealing jest słabszy od liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina[25], nie można oczekiwać, że metodologia CMI może skutkować modelem zdeterminowania, którego siła wielkoliczbowa wykracza poza liczbę Woodina będącą granicą liczb Woodina (tak naprawdę, znacznie poza LSA). Te dwa postępy były głównym powodem, dla którego wyizolowałem Hipotezę 0.30.

Pewną przesłanką za tą hipotezą jest to, że Twierdzenie Główne w Pracy (1) weryfikuje jego prawdziwość w hod myszkach. Tu jest Główne Twierdzenie w Pracy (1).

Twierdzenie 0.34 *Załóżmy, że $(\mathcal{V}, \Omega)$ jest znakomitą (excellent) parą*[26] *i $\mathcal{V} \vDash$* ZFC. *Załóżmy dodatkowo, że κ jest granicą liczb Woodina z $\mathcal{V}$, taką że albo κ jest regularna, albo jej współkońcowość nie jest mierzalna. Wtedy, następujące wzmocnienie Hipotezy 0.30 zachodzi w $\mathcal{V}$ w κ.*

Istnieje przechodnia lbr hod prawiemyszka $\mathcal{M}$ taka, że jeżeli $g \subseteq Coll(\omega, < \kappa)$ jest generyczny, to

1. *$Ord \cap \mathcal{M} = \kappa^+$,*

[25] Tak naprawdę znacznie słabszy, w obszarze LSA jak zostało pokazane w Pracy (8).
[26] Patrz Definicja 2.1 w Pracy (1).

2. *w $\mathcal{M}$ istnieje największa liczba kardynalna ν,*

3. *dla dowolnego rozszerzenia $g \subseteq Coll(\omega, <\kappa)$,*

$$L(\mathcal{M}, \bigcup_{\alpha<\nu}(\mathcal{M}|\alpha)^{\omega}, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g) \vDash \mathsf{AD}.$$

4. *Dodatkowo, jeśli κ nie jest podzwarta, to $\mathcal{M} \vDash \square_\nu$.*

Streszczenie Prac (7) i (9).

Tutaj, krótko streszczę wkłady Prac (7) i (9).

Praca (7): Celem Pracy (7) jest rozszerzenie teorii hod myszek rowiniętej w moim rękopisie [33] do poziomu LSA. Pierwsze 10 rozdziałów Pracy (7) jest moje, Rozdział 11 jest autorstwa Nama Tranga, a Rozdział 12 jest pracą wspólną. Rozdział 12 w Pracy (7) pokazuje pierwsze zastosowanie CMI na poziomie LSA. Pokazuje ona, że PFA pociąga istnienie minimalnego modelu LSA. Ta praca stała się podstawą wszystkich zastosowań CMI na poziomie LSA, nie wyłączając tych wspomnianych w Pracy (8).

Praca (9): Celem głównym Pracy (9) jest rozwiązanie pierwotnego problemu, który zainicjował CMI. Pierwszy zapisany przykład CMI pojawia się w pracy Ketchersida [21], gdzie jest pokazane że istnienie pewnego gęstego ideału na ω_1 wraz z CH pociągają istnienie minimalnego modelu $\theta_0 < \Theta$. Jest to częściowe odwrócenie warunku 2 w Twierdzeniu 0.5. Pełne odwrócenie warunku 2, przy pewnych dodatkowych łagodnych założeniach, było pierwotnym problemem CMI i pojawia się jako [55, Hipoteza 12]. Twierdzenie główne w Pracy (9) jest całkowitym rozwiązaniem pierwotnego problemu CMI.

Obecne i przyszłe kierunki.

Moim celem na tu i teraz jest udowodnienie Hipotezy 0.30. Ponieważ Hipoteza 0.30 łączy kilka kierunków z Deskryptywnej Teorii Modeli Wewnętrznych (DIMT), nie może zostać udowodniona bez zrobienia pobocznych postępów. Zatem, jestem obecnie skupiony na różnych aspektach DIMT, z których trzy wymieniam poniżej.

Udowodnienie HPH: Ostatnio znalazłem dowód HPH poniżej liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina. Ta praca jest nieopublikowana i jednym z moich głównych celów jest spisanie tego dowodu. Następnym oczywistym krokiem jest dowód HPH, który z technicznych powodów musi wyraźnie różnić się od dowodu dla liczby Woodina będącej granicą liczb Woodina.

Rozwinięcie teorii Modeli Changa: Niewiele wiadomo o Modelach Changa nad modelami zdeterminowania, mimo to wyraźnie występują one w Hipotezie 0.30. Jednym z moich głównych celów badawczych jest rozeznanie struktury wewnętrznej takich uniwersów i w szczególności, zaksjomatyzowanie modelu skonstruowanego w Twierdzeniu 0.34. Celem jest znalezienie opisu w języku pierwszego rzędu struktury $\mathcal{M}$ użytej w Twierdzeniu 0.34. Ściślej, celem jest aksjomatyzacja teorii modelu $L(\mathcal{M}, \bigcup_{\alpha<\nu}(\mathcal{M}|\alpha)^\omega, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$ i zbadanie takich modeli niezależnie od otaczającej hod myszki $\mathcal{V}$. Liczę na znalezienie aksjomatyzacji podobnej do AD^+, który jest aksjomatem opisującym wszystkie modele otrzymane postaci $L(\Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$. Główną trudnością jest wyizolowanie $\mathcal{M}$ w pierwszorzędowej konwencji. Zatem, ważnym pytaniem jest następujące.

Pytanie 0.35 *Is* $L(\mathcal{M}, \bigcup_{\alpha<\nu}(\mathcal{M}|\alpha)^\omega, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g) = L(\bigcup_{\alpha<\nu}(\alpha)^\omega, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$*?*

Forsing nad modelami zdeterminowania: To był jeden z moich głównych kierunków badawczych w ostatniej dekadzie. Twierdzenie 0.31 jest konsekwencją badań wykonanych przez te 10 lat. Dowód Twierdzenia 0.31 wykorzystuje forsing nad modelem zdeterminowania postaci $L(\nu^\omega, \wp(\mathbb{R}))$ gdzie $\nu > \Theta$. Ten model jest przykładem $L(\mathcal{M}, \bigcup_{\alpha<\nu}(\mathcal{M}|\alpha)^\omega, \Gamma^*_g, \mathbb{R}^*_g)$ skonstruowanego w dowodzie Twierdzenia 0.34[27] i w tym przypadku, Pytanie 0.35 ma pozytywną odpowiedź. Użytym forsingiem jest $\mathbb{P}_{max} * Add(1, \omega_3) * Add(1, \omega_4)$. Twierdzenie 0.31 pozostawia wiele otwartych pytań. Na przykład, następujące pytanie jest kierunkiem, który obecnie realizuję.

Pytanie 0.36 *Czy teoria* $\mathsf{ZFC} + \forall n > 1(\neg\Box_{\omega_n} + \neg\Box(\omega_n))$ *może zostać zaforsowana nad modelem zdeterminowania? Czy może zostać zaforsowana nad modelem zdeterminowania postaci* $L(\lambda^\omega, \wp(\mathbb{R}))$ *dla pewnej* λ*?*

Oczywiście, następnym krokiem po Pytaniu 0.36 jest zaforsowanie $\neg\Box_{\omega_\omega}$ nad zdeterminowaniem. Jako że teorie wymienione powyżej są konsekwencjami MM^{++}, głównym pytaniem jest tutaj następujące.

Pytanie 0.37 *Czy możliwe jest zaforsowanie* MM^{++} *nad modelem zdeterminowania? Czy możliwe jest zaforsowanie* MM^{++} *nad modelem zdeterminowania za pomocą przeliczalnie zupełnego, jednorodnego pojęcia forsingu?*

Literatura

[1] Dominik Adolf. $AD_{\mathbb{R}} + \theta$ is regular from choiceless patterns of singulars. available at https://universalweasel.files.wordpress.com/2018/07/allsing.pdf.

[27] ν w obu modelach jest identyczne.

[2] Andrés Eduardo Caicedo, Paul Larson, Grigor Sargsyan, Ralf Schindler, John Steel, and Martin Zeman. Square principles in $\mathbb{P}_{\max}$ extensions. *Israel J. Math.*, 217(1):231–261, 2017.

[3] Erik William Closson. *The Solovay sequence in derived models associated to mice*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2008. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.

[4] H. G. Dales and W. H. Woodin. *An introduction to independence for analysts*, volume 115 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[5] Ilijas Farah. All automorphisms of the Calkin algebra are inner. *Ann. of Math. (2)*, 173(2):619–661, 2011.

[6] Qi Feng, Menachem Magidor, and Hugh Woodin. Universally Baire sets of reals. In *Set theory of the continuum (Berkeley, CA, 1989)*, volume 26 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 203–242. Springer, New York, 1992.

[7] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah. Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters. I. *Ann. of Math. (2)*, 127(1):1–47, 1988.

[8] Matthew Foreman, Daniel J. Rudolph, and Benjamin Weiss. The conjugacy problem in ergodic theory. *Ann. of Math. (2)*, 173(3):1529–1586, 2011.

[9] Kurt Gödel. What is Cantor's continuum problem? *Amer. Math. Monthly*, 54:515–525, 1947.

[10] Steve Jackson. Structural consequences of AD. In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 1753–1876. Springer, Dordrecht, 2010.

[11] R. Björn Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 4:229–308; erratum, ibid. 4 (1972), 443, 1972. With a section by Jack Silver.

[12] Ronald Jensen. Inner models and large cardinals. *Bull. Symbolic Logic*, 1(4):393–407, 1995.

[13] Ronald Jensen, Ernest Schimmerling, Ralf Schindler, and John Steel. Stacking mice. *The Journal of Symbolic Logic*, 74(01):315–335, 2009.

[14] A. S. Kechris, D. A. Martin, and Y. N. Moschovakis, editors. *Cabal seminar 79–81*, volume 1019 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[15] A. S. Kechris, D. A. Martin, and J. R. Steel, editors. *Cabal Seminar 81–85*, volume 1333 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[16] Alexander S. Kechris, Benedikt Löwe, and John R. Steel, editors. *Games, scales, and Suslin cardinals. The Cabal Seminar. Vol. I*, volume 31 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, Chicago, IL; Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[17] Alexander S. Kechris, Benedikt Löwe, and John R. Steel, editors. *Wadge degrees and projective ordinals. The Cabal Seminar. Volume II*, volume 37 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[18] Alexander S. Kechris, Benedikt Löwe, and John R. Steel, editors. *Ordinal definability and recursion theory. The Cabal Seminar. Vol. III*, volume 43 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, Ithaca, NY; Cambridge University Press, Cambridge, 2016. Including reprinted papers from the Caltech-UCLA Cabal seminars held in Los Angeles, CA.

[19] Alexander S. Kechris, Donald A. Martin, and Yiannis N. Moschovakis, editors. *Cabal Seminar 77–79*, volume 839 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1981.

[20] Alexander S. Kechris and Yiannis N. Moschovakis, editors. *Cabal Seminar 76–77*, volume 689 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1978.

[21] Richard O'Neal Ketchersid. *Toward $AD_{\mathbb{R}}$ from the continuum hypothesis and an ω_1-dense ideal*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2000. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.

[22] Paul Larson. An introduction to AD^+. available at here.

[23] Paul Larson and Grigor Sargsyan. Failures of square in pmax extensions of chang models. 2021, available at https://arxiv.org/abs/2105.00322.

[24] Paul B. Larson. *The stationary tower*, volume 32 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. Notes on a course by W. Hugh Woodin.

[25] D. A. Martin and J. R. Steel. Iteration trees. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(1):1–73, 1994.

[26] Donald A. Martin and John R. Steel. Projective determinacy. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(18):6582–6586, 1988.

[27] Donald A Martin and John R Steel. A proof of projective determinacy. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(1):71–125, 1989.

[28] William J. Mitchell and John R. Steel. *Fine structure and iteration trees*, volume 3 of *Lecture Notes in Logic*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[29] Justin Tatch Moore. A solution to the L space problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(3):717–736, 2006.

[30] Jan Mycielski and H. Steinhaus. A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 10:1–3, 1962.

[31] Itay Neeman. Optimal proofs of determinacy. *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(3):327–339, 1995.

[32] Itay Neeman. Inner models in the region of a Woodin limit of Woodin cardinals. *Ann. Pure Appl. Logic*, 116(1-3):67–155, 2002.

[33] G. Sargsyan. *Hod Mice and the Mouse Set Conjecture*, volume 236 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 2015.

[34] G. Sargsyan and N. D. Trang. Sealing from iterability. *Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 8:229–248, 2021.

[35] Grigor Sargsyan. Descriptive inner model theory. *Bull. Symbolic Logic*, 19(1):1–55, 2013.

[36] Grigor Sargsyan and Nam Trang. *The Largest Suslin Axiom*. Submitted. Available at https://arxiv.org/abs/2112.04396.

[37] Ernest Schimmerling. The ABC's of mice. *Bull. Symbolic Logic*, 7(4):485–503, 2001.

[38] Ralf Schindler and Martin Zeman. Fine structure. In *Handbook of set theory*, pages 605–656. Springer, 2010.

[39] Saharon Shelah. Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions. *Israel J. Math.*, 18:243–256, 1974.

[40] J. R. Steel. PFA implies $\mathsf{AD}^{L(\mathbb{R})}$. *J. Symbolic Logic*, 70(4):1255–1296, 2005.

[41] J. R. Steel. Local K^c constructions. *J. Symbolic Logic*, 72(3):721–737, 2007.

[42] J. R. Steel. The derived model theorem. In *Logic Colloquium 2006*, volume 32 of *Lect. Notes Log.*, pages 280–327. Assoc. Symbol. Logic, Chicago, IL, 2009.

[43] J. R. Steel and R. D. Schindler. The core model induction; available at https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/.

[44] John R. Steel. Scales in L($\mathbb{R}$). In *Cabal seminar 79–81*, volume 1019 of *Lecture Notes in Math.*, pages 107–156. Springer, Berlin, 1983.

[45] John R. Steel. *The core model iterability problem*, volume 8 of *Lecture Notes in Logic*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[46] John R Steel. Core models with more woodin cardinals. *The Journal of Symbolic Logic*, 67(3):1197–1226, 2002.

[47] John R. Steel. Derived models associated to mice. In *Computational prospects of infinity. Part I. Tutorials*, volume 14 of *Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.*, pages 105–193. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008. Available at author's website.

[48] John R Steel. An outline of inner model theory. *Handbook of set theory*, pages 1595–1684, 2010.

[49] John R. Steel. Gödel's program. In *Interpreting Gödel*, pages 153–179. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[50] John R. Steel. Normalizing iteration trees and comparing iteration strategies. 2016. Available at math.berkeley.edu/∼steel/papers/Publications.html.

[51] John R. Steel and Robert Van Wesep. Two consequences of determinacy consistent with choice. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 272(1):67–85, 1982.

[52] N. Trang. PFA and guessing models. *Israel Journal of Mathematics*, 215:607–667, 2016. Available at www.math.unt.edu/∼ntrang/.

[53] Robert Van Wesep. Wadge degrees and descriptive set theory. In *Cabal Seminar 76–77 (Proc. Caltech-UCLA Logic Sem., 1976–77)*, volume 689 of *Lecture Notes in Math.*, pages 151–170. Springer, Berlin, 1978.

[54] W. Hugh Woodin. Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(18):6587–6591, 1988.

[55] W. Hugh Woodin. *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*, volume 1 of *De Gruyter Series in Logic and its Applications*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, revised edition, 2010.

[56] W. Hugh Woodin. In search of Ultimate-L: the 19th Midrasha Mathematicae Lectures. *Bull. Symb. Log.*, 23(1):1–109, 2017.

[57] Yizheng Zhu. Realizing an AD^+ model as a derived model of a premouse. *Ann. Pure Appl. Logic*, 166(12):1275–1364, 2015.