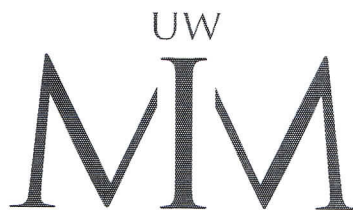


UNIwersytet
Warszawski



Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
dr hab. Anna Zatorska-Goldstein

Warszawa, 17 września 2020

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Antoniego Kijowskiego
"Mean value property approach to various notions of harmonicity on Euclidean spaces, Carnot groups and metric measure spaces"

Rozprawa doktorska mgra Antoniego Kijowskiego została napisana po angielsku pod kierunkiem dra hab. Tomasza Adamowicza (IMPAN). Jej wyniki oscylują wokół jednego z najbardziej znanych klasycznych twierdzeń z teorii równań różniczkowych: twierdzenia o wartości średniej dla funkcji harmonicznych. Z jednej strony funkcje harmoniczne (rozwiązania równania Laplace'a) posiadają tę własność, tzn. w każdym ustalonym punkcie wartość funkcji jest równa średniej całkowitej liczonej po kulach lub sferach; z drugiej, funkcje ciągłe mające tę własność są harmoniczne.

Badania dotyczące tego, na ile twierdzenie to pozostaje prawdziwe, gdy dziedzina funkcji przestaje być przestrzenią euklidesową (a jest np. rozmaitością, bądź ma inną niestandardową strukturę) wpisują się w główny nurt analizy. W ostatnich latach gwałtownie rozwinęła się też teoria umożliwiająca budowanie sensownych odpowiedników modeli matematycznych wykorzystujących równania różniczkowe na przestrzeniach bez struktury liniowej. Wyniki J. Cheegera, J. Heinonena, P. Hajlasza, S. Keitha, N. Shanmugalingam i innych matematyków pokazały, że struktura przestrzeni metrycznej z miarą okazuje się być wystarczająca do wprowadzenia odpowiednika gradientu funkcji i zdefiniowania przestrzeni typu Sobolewa, a to umożliwiło wariacyjne formułowanie problemów. Pojawiły się pytania o nowe metody i bardziej subtelne opisy badanych obiektów.

W rozprawie badane są trzy typy funkcji i związanych z nimi zagadnień: funkcje

silnie harmoniczne (funkcje lokalnie całkowalne posiadające prawie wszędzie własność wartości średniej na kulach), funkcje p -harmoniczne i ich nieliniowa asymptotyczna własność wartości średniej oraz funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne. Asymptotyczna własność wartości średniej oznacza tu, że dla każdego x (w wybranym obszarze) zachodzi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B(x,r)} u(y) dy - u(x)}{r^2} = 0.$$

Funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne zaś, to funkcje lokalnie całkowalne, dla których powyższa zbieżność jest niemal jednostajna. Pojęcie asymptotycznej własności wartości średniej jest ważne w analizie na rozmaitościach. Funkcje harmoniczne na gładkich rozmaitościach riemannowskich nie muszą posiadać własności wartości średniej, ale posiadają ją w podanym wyżej sensie asymptotycznym.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy stanowi wprowadzenie, które czyta się z dużą przyjemnością. Wyniki zamieszczone w doktoracie zostały szerzej opisane w perspektywie znanych w literaturze rezultatów i powiązane z innymi kierunkami badań, m.in. ze wspomnianą analizą na rozmaitościach. Ta część pracy może stanowić cenne źródło informacji dla osób zainteresowanych tą dziedziną badań. Moje zastrzeżenia budzi jednak fakt, że opisując we Wprowadzeniu wyniki swoich badań doktorant nie odniósł się do tego, że zostały one zamieszczone bądź w opublikowanych już artykułach naukowych, bądź w upublicznionych na serwerze Arxiv.org preprintów. To zastrzeżenie będzie szerzej omówione dalej.

Rozdział 2 poświęcony jest charakteryzacji funkcji silnie harmonicznych określonych na otwartych podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z ważoną miarą Lebesgue'a oraz z metryką indukowaną przez normę. Główny wynik tego rozdziału to uogólnienie wspomnianego na samym początku twierdzenia o wartości średniej. Wykazano, że każda funkcja silnie harmoniczna (we wspomnianym wyżej sensie) jest słabym rozwiązaniem układu eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych, którego liczba równań zależy od regularności wagi. Warunek dostateczny, udowodniony przy założeniu, że waga jest funkcja analityczną, stanowi, że każde rozwiązanie wyżej wymienionego układu równań jest silnie harmoniczne. Założenie analityczności wagi jest konsekwencją metody dowodowej i użycia pewnego wariantu wzoru Pizzettiego dla średnich. Wnioskiem z przeprowadzonej analizy są wyniki o regularności funkcji silnie harmonicznych. Dla dowolnej wagi lokalnie całkowalnej funkcje silnie harmoniczne są ciągłe. Dla lokalnie ograniczonych wag z przestrzeni

Sobolewa funkcje silnie harmoniczne dziedziczą sobolewowską regularność. Przy założeniu o analityczności wagi funkcje silnie harmoniczne są analityczne. W przypadku planarnym z metryką indukowaną przez normę l^p obliczone zostały współczynniki wspomnianego układu równań. Ponadto dla stałej wagi oraz pozostałych wykładników $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ wykazano, że wymiar przestrzeni funkcji silnie harmonicznych jest skończony i wynosi 8.

Wyniki te nie są może nieoczekiwane, niemniej jednak są nowym i interesującym wkładem w dziedzinę. Odniesienia do poprzednich rezultatów otrzymanych w tym kierunku są dobrze opisane i skomentowane. Zastrzeżenie redakcyjne do tego fragmentu rozprawy jest takie, że zawartość Rozdziału 2 odpowiada wynikom zamieszczonym w publikacji

- A. Kijowski; *Characterization of mean value harmonic functions on norm induced metric measure spaces with weighted Lebesgue measure*, Electr. JDE, Vol. 2020 (2020), No. 08, pp. 1-26,

co nie zostało w żaden sposób zaznaczone w tekście (praca ta nie została nawet umieszczona w bibliografii). To niedociągnięcie jest o tyle mało ważne, że jest to samodzielna praca doktoranta. Tekst tej publikacji został częściowo przeformułowany, ale sformułowania twierdzeń i dowody są tożsame z tymi w rozprawie.

Rozdział 3 rozprawy poświęcony jest rozwiązaniom lepkościowym równania znormalizowanego subeliptycznego p -laplasjanu na grupach Carnot dla $1 \leq p \leq \infty$. Wiadomo, że funkcje p -harmoniczne nie muszą posiadać własności wartości średniej. Jak jednak zaobserwowano w pracy Manfredi, Parviainen, Rossi *An asymptotic mean value property characterization for p -harmonic functions*, Proc. AMS, 2010, funkcje te spełniają równość

$$u(x) = \frac{p-2}{n+p} \left(\frac{\min u + \max u}{2} \right) + \frac{n+2}{n+p} \int_{B(x,r)} u(y) dy + o(r^2),$$

gdzie minimum oraz maksimum jest liczone po kuli $\overline{B(x,r)}$. Ta zmodyfikowana własność wartości średniej ma interpretację probabilistyczną, wiąże się z teorią gier losowych. We wspomnianym artykule wykazano, że dla funkcji ciągłej bycie rozwiązaniem lepkościowym znormalizowanego równania p -Laplace'a oraz spełnianie podanej wyżej zmodyfikowanej asymptotycznej własności wartości średniej są równoważne. W rozprawie doktorskiej wynik ten został uogólniony na grupy Carnot stopnia 2. Idea dowodu bazuje na pomysły zaproponowanym w niedawnej

pracy Ishiwata, Magnanini, Wadade *A natural approach to the asymptotic mean value property for the p -Laplacian* Calc. Var PDE 2017. Jednak (nieeuklidesowa) geometria grup Carnot powoduje, że istotne części dowodu wymagają modyfikacji, zwłaszcza dla przypadku $p = \infty$. Kluczowe twierdzenie Rozdziału 3 rozprawy zostało udowodnione w dwóch szczególnych przypadkach: grupy Heisenberga oraz ogólnej grupy Carnot stopnia 2. W mojej opinii wynik ten jest interesujący. Dobrze opisany został wpływ nieeuklidesowej struktury geometrycznej przestrzeni (geometrii kul) na modyfikacje dowodu zamieszczonego we wspomnianym wyżej artykule.

Redakcyjna strona pracy znów budzi pewne zastrzeżenia. Wyniki tego rozdziału stanowią część artykułu

AKPW T. Adamowicz, A. Kijowski, A. Pinamonti, B. Warhurst; *Variational approach to the asymptotic mean-value property for the p -Laplacian on Carnot groups*. Nonlinear Anal. 198 (2020), 111893.

W rozprawie tym razem zostało to odnotowane, jednak w mojej opinii zbyt późno. Czytelnik przy pierwszym czytaniu rozprawy może nie zauważyć, że wyniki zamieszczone w tym rozdziale są częścią wspomnianego artykułu. Szczęśliwie oświadczenia współautorów i promotora pozwalają na konkluzję, że wkład doktoranta w powstanie artykułu był istotny. Dwa szczególne przypadki grup Carnot opisane w Rozdziale 3 rozprawy stanowią ważną ilustrację ogólnego twierdzenia dla dowolnej grupy Carnot znajdującego się w [AKPW].

Rozdział 4 poświęcony jest funkcjom asymptotycznie średnio harmonicznym na przestrzeniach metrycznych z miarą lokalnie podwajającą. W przypadku grupy Heisenberga wykazano, że punktowa asymptotyczna własność wartości średniej posiada zwykłą harmoniczną funkcji, tzn. w sensie spełniania subelitycznego odpowiednika równania Laplace'a. Na ogólnej przestrzeni metrycznej z miarą podwajającą dowiedziono, że funkcje te należą do ułamkowych przestrzeni Hajlasza-Sobolewa oraz, że są α -holderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $0 < \alpha < 1$. Zastosowana metoda dowodu pozwala na udowodnienie lokalnej lipschitzowskiej ciągłości dla funkcji silnie harmonicznym przy założeniach słabszych niż znane w literaturze. Ponadto dowiedziono skończoności wymiaru przestrzeni funkcji silnie harmonicznym o wzroście wielomianowym, o ile miara ma własność zanikaniania na pierścieniach. Używając metody rozdmuchania na przestrzeni metrycz-

nej wykazano silną harmoniczną funkcji stycznych do funkcji asymptotycznie silnie harmoniczych. W ważonych przestrzeniach euklidesowych, gdy waga jest lokalnie lipschitzowska, funkcje asymptotycznie średnio harmoniczne są rozwiązaniami eliptycznego równania różniczkowego cząstkowego. Wyniki te stanowią naturalną kontynuację badań opisanych w Rozdziale 2 i częściowo 3 (opis tego co się dzieje na grupie Heisenberga).

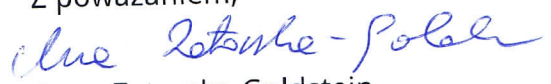
Redakcyjna strona tego rozdziału wygląda lepiej niż poprzednich. Wyniki w nim umieszczone stanowią część artykułu

AKS T. Adamowicz, A. Kijowski, T. Soultanis; *Asymptotically mean value harmonic function in doubling metric measure spaces*, arXiv:2005.13902 (2020).

Związek artykułu z tym rozdziałem został wspomniany w rozprawie. Oświadczenie promotora wskazuje na to, że on sam miał większy wpływ na te części artykułu, które nie zostały włączone do rozprawy.

Podsumowując – rozprawa ma pewne usterki o charakterze redakcyjno-formalnym. Z drugiej strony czyta się ją bardzo dobrze, a zawarte w niej wyniki doktoranta są nowe i interesujące. Rozprawa spełnia wymogi ustawowe. Wnioskuje zatem o dopuszczenie mgra Antoniego Kijowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z poważaniem,


Anna Zatorska-Goldstein