Grzegorz Kapustka
Instytut matematyki UJ
grzegorz.kapustka@uj.edu.pl

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Recenzja doktoratu Feliksa Rączki

Badanie sztywnych przestrzeni analitycznych zostało zapoczątkowane w 1962 roku przez Tate'a w celu analizy p-adycznych krzywych eliptycznych ze złą redukcją. Jego ideę można opisać w następujący sposób: w analogii do badania rozmaitości zdefiniowanych nad ciałem liczb wymiernych poprzez analizowanie tej rozmaitości nad rozszerzeniem zespolonym $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$, można rozważać inne rozszerzenia ciał. Pozwala to stosować metody analizy matematycznej do arytmetycznych problemów, takich jak teoria Hodge'a czy etalne grupy fundamentalne. W podobny sposób oczekujemy, że będzie można wykorzystywać metody analizy matematycznej do badania przestrzeni nad ciałami niearchimedesowymi takimi jak $\mathbb{Q}_p$ lub $\mathbb{C}((t))$.
Idea ta znalazła już wiele zastosowań, od sformułowania programu Langlandsa, przez rozważanie p-adycznych aproksymacji, aż po badanie infinitezymalnych deformacji rozmaitości zespolonych. Sztywne przestrzenie analityczne są obecnie badane w wielu wiodących ośrodkach na świecie i oczekujemy, że ich zrozumienie pomoże rozwiązać znaczące problemy z teorii liczb, geometrii algebraicznej i teorii reprezentacji.
Praca doktorska Feliksa Rączki dotyczy analizy kohomologii de Rhama D-modułów na sztywnych przestrzeniach analitycznych. Przypomnijmy, że D-moduły (tzn. moduły nad pierścieniem operatorów różniczkowych) badane są od lat 70. XX wieku (począwszy od Sato i Kashiwary) w odpowiedzi na idee M. Saito dotyczące algebraicznej analizy. Spektakularnym osiągnięciem tej metodologii jest dowód hipotezy Kazhdana-Lusztiga. Były one również jedną z motywacji wprowadzenia „perwersyjnych" snopów, które są obecnie intensywnie badane w związku z zastosowaniami w problemach dotyczących osobliwych przestrzeni.
Głównym osiągnięciem Feliksa Rączki jest dowód, że wymiary kohomologii de Rhama holomorficznych D-modułów na sztywnych przestrzeniach analitycznych (spełniających dodatkowe założenia) są skończone. Problem pojawia się naturalnie w związku z trudnościami związanymi z rozwinięciem teorii Hodge'a (w pracy Achingera i Talpo) dla rozmaitości nad ciałem niearchimedesowym.
Zawartość rozprawy: Praca zaczyna się od wprowadzenia niezbędnych pojęć. Pierwszy rozdział jest rozbudowanym wstępem, w którym wyjaśnione są główne wyniki. Następnie autor przedstawia kontekst oraz usprawiedliwia konieczność wprowadzenia nowych metod poprzez dyskusję, jak inne strategie dowodowe stosują się w rozważanym przypadku. Na końcu rozdziału wprowadzone są oznaczenia oraz omówiona struktura pracy.
Drugi rozdział zaczyna się od wprowadzenia teorii sztywnych rozmaitości analitycznych. Przedstawiona jest teoria niearchimedesowych algebr Banacha. Następnie omówione są konstrukcje form różniczkowych i kwazi-koherentnych snopów na takich rozmaitościach. Kolejno wprowadzona jest teoria D-modułów i oryginalne wyniki dotyczące ciągłości operatorów na rozważanych przestrzeniach Banacha. Wyniki te są niezbędne do zrozumienia snopu form

różniczkowych na sztywnych rozmaitościach. W konsekwencji autor przedstawia centralny obiekt, którym jest snop form różniczkowych rzędu $\leqslant n$ na sztywnych rozmaitościach nad ciałem niearchimedesowym (pozwala to później zdefiniować moduł $\bar{M}$).

Główny wynik pracy doktorskiej jest udowodniony w rozdziale trzecim. Dotyczy on analizy kohomologii de Rhama D-modułów na sztywnych przestrzeniach analitycznych oraz pokazania, że w przypadku rozmaitości kwazi-zwartych, kwazi-separowalnych i o charakterystyce 0 wymiary tych kohomologii są skończone. Powyższy wynik jest nietrywialny nawet w przypadku gładkiej zespolonej rozmaitości algebraicznej. Można opisać w tym przypadku ciekawy związek pomiędzy wiązkami wektorowymi z algebraiczną koneksją a systemami lokalnymi na odpowiadającej jej rozmaitości zespolonej X_{an}. Jeżeli koneksja ta ma "regularne"osobliwości, to kohomologie de Rhama są kohomologiami stowarzyszonego systemu lokalnego (jest to wynik Deligne'a) i są naturalnie skończone. Jednak kiedy osobliwości nie są regularne, dowód jest nietrywialny (patrz prace Bernsteina).

Warto zauważyć, że twierdzenie o skończoności wymiaru kohomologii de Rhama nie zachodzi w charakterystyce różnej od zera (np. dla liczb p-adycznych). Z tego powodu dotychczas znana metoda Bernsteina nie działa w ogólniejszym kontekście. Istnieje również inne podejście do problemu opisane w pracach Van den Essena (dla rozmaitości nad szeregami formalnymi nad ciałem o charakterystyce zero), lecz wydaje się, że ono także nie uogólnia się na rozważany przypadek. Autor przedstawia oryginalne i pomysłowe rozwiązanie problemu, które opiszę poniżej. Pokrywamy rozmaitość rozmaitościami posiadającymi globalny układ współrzędny (affinoidami). W sytuacji podstawowego affinoidu, tzn. kiedy rozmaitość jest polidyskiem, Rączka opisuje następujące kroki:

1. Wprowadzenie uzupełnionego pierścienia operatorów różniczkowych $\hat{D}$ i badanie uzupełnienia $\bar{M} = M \otimes_{\mathscr{D}} \bar{\mathscr{D}}$,

2. pokazanie, że kohomologie de Rhama M i $\bar{M}$ są takie same (ten kluczowy dowód jest przedstawiony w sekcji 3.3.2). Jest to czysto algebraiczny fakt pokazany w Lemacie 3.3.3, korzystający z faktu, że twierdzenie zachodzi nad ciałem liczb zespolonych.

Następnym krokiem jest rozważenie ogólnych affinoidów poprzez analizę D-modułów na domkniętych podzbiorach polidysku. Godnym zwrócenia uwagi jest tutaj Lemmat 3.4.2, który jest ciekawym wynikiem samym w sobie. Ostatnim krokiem jest przejście do ogólnego przypadku przez rozważenie skończonego pokrycia; konkluzja jest otrzymana klasycznie, używając ciągów spektralnych.

W czwartym rozdziale Rączka podejmuje inny temat również związany ze sztywnymi rozmaitościami analitycznymi. Autor przedstawia nowy dowód wzoru Deligne'a na indeks koneksji na krzywych. Próbuje również uogólnić ten wzór na przypadek krzywych nad ciałem niearchimedesowym, jednak wyniki są tylko częściowe. Ta część zaczyna się od przedstawienia abstrakcyjnej teorii krzywych za pomocą waluacji (wydaje mi się, że jest to przesada, ponieważ teoria jest zwykle opisywana w pierwszych kursach geometrii algebraicznej). Jest to przygotowanie do opisania wzoru Deligne'a na sztywnych przestrzeniach jednowymiarowych. Głównym pomysłem jest użycie "cyclic vector theorem"z pracy Y. André, F. Baldassarri oraz M. Cailotto o istnieniu "cyklicznego wektora generującego bazę rozważanej wiązki". Metody te dają możliwość uogólnienia wzoru Deligne'a na rozmaitości nad ciałem niearchimedesowym, jednak pojawiają się nowe problemy techniczne. Autor uogólnia twierdzenie tylko w specjalnych przypadkach (np. dla dysku Tate'a).

Ocena rozprawy: Część wprowadzająca pracy zajmuje 70 stron i jest napisana starannie. Część ta zawiera również oryginalne wyniki dotyczące operatorów na przestrzeni Banacha, godnym uwagi jest Propozycja 2.3.12 która jest ogólnym wynikiem o ciągłości operatorów. Autor odnosi się do bogatej literatury, organizując materiał w sposób przygotowujący do opisania głównego wyniku. Część wstępna jest jednak bardzo abstrakcyjna i przedstawiona w dużych szczegółach (opisane są

również dowody klasycznych twierdzeń). Takie podejście jest bardzo pouczające dla osoby redagującej, ale sprawia, że praca robi wrażenie bardzo technicznej i abstrakcyjnej. Brakuje mi w tej części jedynie opisu motywacji do podjęcia rozważanych problemów. Ciekawym tematem byłoby na przykład krótkie omówienie idei spektakularnego dowodu hipotezy Sabbaha autorstwa Kedlayi albo dowodu twierdzenia z p-adycznej teorii liczb. Tematyka ta wywołala ogromny postęp w fundamentalnych problemach.
Można znaleźć nieliczne błędy w interpunkcji, również sposób cytowania i referencji powinien być jednorodny (Prop. czy Proposition?). Niedociągnięcia są jednak niewielkie i uważam, że praca jest zredagowana jasno i starannie. Uważam, że dużym osiągnięciem jest opanowanie dwóch ważnych, nowoczesnych i intensywnie badanych teorii: sztywnych przestrzeni analitycznych i teorii D-modułów. Autor poświęcił dużo pracy, aby wytłumaczyć czytelnikowi konieczne pojęcia. Doceniam również opisy idei dowodów przeprowadzonych w najprostszych sytuacjach.
Konkluzja: Moja opinia na temat omawianej pracy jest jednoznacznie pozytywna. Dowód głównego wyniku jest pomysłowy. Praca jest ciekawa i napisana jasno i starannie. Magistrant osiągnął dobry poziom naukowy, wykorzystując nowoczesne narzędzia w trudnych teoriach D-modułów i sztywnych rozmaitości analitycznych. Z całą pewnością osiągnął poziom umożliwiający samodzielne podjęcie aktualnych tematów w dziedzinie. Tematyka pozwala kontynuować dalszy rozwój poprzez kontakty z ważnymi ośrodkami naukowymi na całym świecie.

ENIGMA
Podpisany elektronicznie przez
Grzegorz Kapustka
30.07.2024
18:33:54 +02'00'