Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 23.08.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej Macieja Kowalskiego

The combinatorial structure of cumulants of symmetric functions

Praca doktorska Macieja Kowalskiego bada pewne typy wielomianów symetrycznych powiązanych ściśle z rozmaitymi obiektami kombinatorycznymi (tj. partycje, diagramy Younga, grafy, ścieżki kratowe, etc.). Typowy problem w tej dziedzinie polega na wyrażeniu badanej klasy wielomianów symetrycznych w postaci kombinacji liniowej w zadanej bazie i uzyskaniu określonych informacji o współczynnikach tego rozwinięcia. Najczęściej chodzi o potwierdzenie, że owe współczynniki są liczbami całkowitymi nieujemnymi (bądź wielomianami o takich współczynnikach) przy zadanej bazie funkcji symetrycznych Schura. Jest to ciekawa i ważna tematyka w obrębie kombinatoryki algebraicznej posiadająca liczne i głębokie powiązania z różnymi dziedzinami, w tym teorią reprezentacji, geometrią algebraiczną, teorią grup, statystyką, czy nawet mechaniką kwantową.

Jednym z centralnych problemów otwartych jest tu tak zwana *b-hipoteza* Gouldena-Jacksona z roku 1996, interpretująca współczynniki pewnej funkcji tworzącej, wykorzystującej wielomiany symetryczne Jacka, przy użyciu grafów zanurzonych w powierzchniach (tzw. map). Obiecujące podejście wykorzystujące kumulanty funkcji symetrycznych, w tym wypadku wielomianów Jacka, zaproponowali Dołęga i Féray. W szczególności, w roku 2017 Dołęga sformułował ogólną hipotezę o kumulantach wielomianów Macdonalda stanowiącą daleko idące uogólnienie pierwotnej hipotezy o ich dodatniości (potwierdzonej w roku 2001). To właśnie ten problem stanowi główną inspirację omawianej tezy doktorskiej.

Głównym obiektem badań w rozprawie Macieja Kowalskiego są kumulanty wielomianów symetrycznych LLT (od nazwisk autorów, Leclerc, Lascoux and Thibon). Można je zdefiniować za pomocą tablic Younga dla skośnych partycji. Wielomiany LLT pojawiają się jako składniki w naturalnym rozkładzie wielomianów Macdonalda (Twierdzenie 2.2). Ich kumulanty pozostają w analogicznej relacji do kumulant wielomianów Macdonalda. Odpowiednia hipoteza (Conjecture 3) o ich dodatniości stanowi uogólnienie wspomnianej powyżej hipotezy Dołęgi (Conjecture 2).

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów, z których dwa pierwsze stanowią wprowadzenie do tematyki oraz przedstawienie najważniejszych wyników i hipotez. Wyniki autora, które postaram się zwięźle omówić poniżej, zawarte zostały w rozdziałach 3 i 4.

W rozdziale 3 autor formułuje wspomnianą hipotezę (Conjecture 3) o dodatniości Schura kumulant LLT oraz dowodzi (Theorem 3.2, 3.3), że pociąga ona hipotezę Dołęgi (Conjecture 2). Następnie definiuje pojęcie grafu LLT oraz związanego z nim wielomianu oraz znajduje ciekawą interpretację kumulant LLT jako ważonych funkcji tworzących kolorowań danego grafu (Theorem 3.5). Wynik ten pozwala uzyskać szereg rezultatów o dodatniości różnego typu (jednomianowa, e-dodatniość, etc.) dla pewnych szczególnych grafów (Theorem 3.7, 3.9, 3.12). W końcowej części rozdziału znajdujemy dalsze wyniki potwierdzające główną hipotezę w kilku szczególnych przypadkach kształtów jednokomórkowych. Metody dowodowe to wyrafinowana kombinacja rozmaitych interpretacji, odpowiedniości, przekształceń jednych struktur w inne oraz pomysłowych zastosowań wcześniejszych wyników. Praca z tymi wynikami ukazała się w czasopiśmie *Electronic Journal of Combinatorics*.

Rozdział 4 zawiera w zasadzie jeden główny wynik (Theorem 4.1) podający ciekawą formułę kombinatoryczną dla kumulant LLT w przypadku szczególnej rodziny grafów, zwanych topniejącymi lizakami (ang. melting lollipops). Wzór przedstawia kumulantę LLT jako sumę odpowiednich wielomianów LLT indeksowaną drzewami rozpinającymi takiego lizaka. Dowód tego rezultatu jest dość złożony, wymaga szeregu przejść ustanawiających wzajemne relacje pomiędzy rozmaitymi obiektami kombinatorycznymi (tj. ścieżki Schrödera, Dycka, ukorzenione drzewa planarne, funkcje parkingowe, czy diagramy jednokomórkowe). Praca z tym wynikiem jest dostępna w znanym repozytorium internetowym arXiv i zapewne czeka na publikację w czasopiśmie.

Rozprawa jest zredagowana bardzo dobrze, zawiera sporo przykładów, komentarzy, świetnych rysunków, znakomicie ilustrujących przedstawiany materiał. Czyta się ją z prawdziwą przyjemnością.

Podsumowując stwierdzam, że praca Macieja Kowalskiego to bardzo dobry doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących arcyciekawej tematyki w obrębie kombinatoryki algebraicznej. Ich uzyskanie świadczy o znakomitym opanowaniu warsztatu badawczego oraz sporej erudycji autora. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Macieja Kowalskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk