prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

Warszawa 10 września 2020

Recenzja rozprawy doktorskiej

Mean value property approach to various notions of harmonicity on Euclidean spaces, Carnot groups and metric measure spaces

autorstwa pana magistra *Antoniego Kijowskiego*

Pan mgr Antoni Kijowski jest absolwentem Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. Jeszcze jako student studiów pierwszego stopnia pan Antoni Kijowski był słuchaczem mojego wykładu z równań różniczkowych cząstkowych. Już wtedy dawało się zauważyć nieprzeciętne matematyczne zdolności pana Antoniego Kijowskiego. Swoje szczególne zainteresowania analityczne na przestrzeniach metrycznych pan Antoni Kijowski opisał w pracy licencjackiej pod opieką dra hab. Przemysława Górki oraz w pracy magisterskiej pod opieką dra hab. Tomasza Adamowicza. W złożonej do oceny rozprawie doktorskiej pan magister Antoni Kijowski bada pojęcie harmoniczności na różnych matematycznych strukturach. Cała rozprawa poza abstraktem i wprowadzeniem składa się z trzech rozdziałów związanych z rodzajem struktury matematycznej, na której badana jest harmoniczność lub jej uogólnienia. Przejdę teraz do omówienia trzech istotnych rozdziałów rozprawy.

Rodział drugi rozprawy jest poświęcony badaniu mocnej harmoniczności w przestrzeniach euklidesowych z metryką indukowaną przez normę oraz wyposażonych w zwagowaną miarę Lebesgue'a. Punktem wyjścia prowadzonych badań była definicja harmoniczności wprowadzona przez Adamowicza, Gaczkowskiego i Górkę na przestrzeniach metrycznych z miarą. Funkcję zdefiniowaną na otwartym podzbiorze przestrzeni metrycznej nazywa się mocno harmoniczną jeżeli ma własność wartości średniej po kulach zawartych z domknięciem w dziedzinie tej funkcji. Jest to bardzo naturalne rozszerzenie klasycznej definicji harmoniczności, która jak doskonale wiadomo, charakteryzuje się poprzez własność wartości średniej. Główne wyniki tego rozdziału to odpowiedzi na klasyczne pytania: czy funkcje mocno harmoniczne są rowiązaniami pewnych równań różniczkowych cząstkowych i odwrotnie, czy rozwiązania tych równań muszą być mocno harmoniczne. Okazało się, że odpowiedzi na oba pytania są ściśle związane z regularnością wagi. Gdy (Ω, d, μ) jest przestrzenią metryczną z metryką indukowaną przez normę i $\mu = \omega\, dx$ z funkcją $\omega > 0$ prawie wszędzie to jeżeli $\omega \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ (przypadek $m = 1$) lub jeżeli $\omega \in C^{2m-1,1}_{loc}(\Omega)$ dla $m > 1$ to każda funkcja u mocno harmoniczna jest słabym rozwiązaniem następującego układu równań różniczkowych cząstkowych (dla $m = 1$ jest to jedno równanie)

$$\sum_{j=|\alpha|} A_\alpha (D^\alpha(u\omega) - uD^\alpha\omega) = 0 \quad j = 2, 4, \ldots, 2m \qquad (\star)$$

gdzie współczynniki A_α to momenty wyliczone dla kuli jednostkowej w metryce d to znaczy

$$A_\alpha = \binom{|\alpha|}{\alpha} \int_{B^d(0,1)} x^\alpha\, dx\,.$$

Dowód tego twierdzenia wymagał uzyskania odpowiedniej regularności funkcji mocno harmonicznych. Doktorant wykazał, że jeżeli $\omega \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ gdzie $p \in (1, +\infty)$ oraz jest lokalnie ograniczona to każda funkcja mocno harmoniczna jest też elementem przestrzeni $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Samo dojście do układu $(\star)$ polegało na bardzo eleganckim wykorzystaniu transformaty Fouriera. Uzyskany w rozprawie wynik jest uogólnieniem rezultatu z pracy [Bos68], gdzie rozważano tylko metrykę euklidesową. Odpowiedź na drugie pytanie wymagała już założenia o analityczności wagi. Doktorant wyraźnie podkreśla w Uwadze 2.22, że założenie o analityczności wagi jest ściśle powiązane z wykorzystaniem w dowodzie formuły Pizzetiego. Narzuca się więc naturalne pytanie o konieczność tego założenia. Uzyskany przez doktoranta wynik jest uogólnieniem twierdzenia z pracy [Bos68] gdzie zakładano dodatkowo, że dla pewnego $m \geq 1$ m-ty laplasjan z funkcji ω jest kombinacją liniową niższych laplasjanów z ω. Ten bardzo ciekawy rozdział rozprawy kończy się analizą wymiaru przestrzeni funkcji mocno harmonicznych. W przypadku gdy $\omega \equiv 1$ oraz wymiar przestrzeni euklidesowej wynosi dwa wykazano, że wymiar przestrzeni funkcji mocno harmonicznych w metryce l^p dla $p \neq 2$ wynosi 8.

Rozdział trzeci rozprawy jest poświęcony badaniu harmoniczności (ściślej asymptotycznej p-harmoniczności) na dwukrokowych grupach Carnota. Podstawowym przykładem takiej struktury matematycznej jest n-wymiarowa grupa Heisenberga. Podstawowy obiekt występujący w tej części rozprawy to uogólnienie wartości średniej po kulach w topologii L^p gdy $p \neq 2$. Zdefiniowano liczbę $\mu_p(\varepsilon, u)(x)$ taką, że

$$\|u - \mu_p(\varepsilon, u)\|_{L^p(\overline{B(x,\varepsilon)})} = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|u - \lambda\|_{L^p(\overline{B(x,\varepsilon)})}\,.$$

Okazuje się, że $\mu_2(\varepsilon, u)$ jest całką średnią po kuli $B(x, \varepsilon)$. Główne własności wielkości $\mu_p(\varepsilon, u)$ opisano w pracy [IMW17]. Drugim głównym obiektem w tej części rozprawy jest znormalizowany p-laplasjan na grupie Carnota G oznaczany przez $\Delta^N_{p,G}$. Główny wynik tej części rozprawy to równoważność następujących dwóch warunków dla funkcji ciągłych na otwartym podzbiorze dwukrokowej grupy Carnota G
(i) u jest rozwiązaniem lepkościowym równania $\Delta^N_{p,G} u = 0$,
(ii) $u = \mu_p(\varepsilon, u) + o(\varepsilon^2)$ w sensie lepkościowym.
Co prawda w tej części rozprawy nie pojawia się formalna definicja funkcji asymptotycznie p-harmonicznych, to po analizie tego rozdziału taka definicja nasuwa się sama.

Uzyskany w rozprawie wynik jest uogólnieniem podobnego rezultatu z pracy [IMW17] na strukturach dwukrokowych grup Carnota. Szczególna postać znormalizowanego p-laplasjanu zmusza do użycia technik lepkościowych przy analizie rozwiązań równania $\Delta^N_{p,G} u = 0$. W Definicji 3.14 rozwiązania lepkościowego tego równania o funkcjach próbnych φ zakłada się, że różnica $u - \varphi$ ma w rozważanym punkcie ścisłe ekstremum lokalne. Z teorii rozwiązań lepkościowych w $\mathbb{R}^n$ wiemy, że założenie to można osłabić i opuścić słowo ścisłe. Czy w tym przypadku także można tak zrobić? Dowód głównego wyniku tej części rozprawy jest konsekwencją lematu, w którym uzyskuje się opis wielkości $\mu_p(\varepsilon, q)$ dla pewnych form kwadratowych q zdefiniowanych na otwartych podzbiorach grupy G. Warto podkreścić, że lemat ten pochodzi z pracy [Ada+20] i dotyczy k-krokowych grup Carnota. Ze względu na istotę tego lematu w dowodzie wyniku głównego doktorant zamieszcza w rozprawie dowód tego lematu w przypadku $k = 2$. Ten bardzo techniczny dowód stanowi zasadniczą część w rozdziale trzecim rozprawy.

Rozdział czwarty rozprawy zawiera badania asymtotycznej harmoniczności na przestrzeniach metrycznych. Głównym obiektem matematycznym występującym w tej części rozprawy jest r-laplasjan zdefiniowany równością

$$\Delta^\mu_r u(x) = \frac{u_{B(x,r)} - u}{r^2},$$

gdzie $u_{B(x,\varepsilon)}$ jest całką średnią po kuli $B(x, \varepsilon)$. Funkcję $u \in L^1_{loc}(X)$, gdzie (X, d, μ) jest przestrzenią metryczną z miarą μ nazywa się asymptotycznie harmoniczną gdy dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset X$ zachodzi

$$\lim_{r \to 0^+} \|\Delta^\mu_r u\|_{L^\infty(K)} = 0.$$

Wprowadza się też klasę funkcji dla których jest sens analizować operację przejścia do granicy $r \to 0^+$ w powyższej definicji

$$AMV^p(X) = \{u \in L^p(X) : \|u\|_{AMV} = \limsup_{r \to 0^+} \|\Delta^\mu_r u\|_{L^p(X)} < +\infty\}.$$

Rozdział czwarty rozprawy zawiera wiele wartościowych wyników i nie da się z niego wybrać jednego lub dwóch najważniejszych, jak to miało miejsce w rozdziałach poprzednich rozprawy. W swojej recenzji opiszę tylko te, które uznałem za najbardziej wartościowe. Gdy $\Delta^\mu_r u = u$ dla odpowiednio małych r to funkcja u jest mocno harmoniczna. Pierwszy wynik tej części rozprawy dotyczy regularności funkcji mocno harmonicznych. Doktorant dowodzi, że gdy przestrzeń metryczna jest zwarta i miara μ jest podwajająca to funkcje mocno harmoniczne w takiej przestrzeni są lokalnie lipszicowskie. Twierdzenie to jest istotnym uogólnieniem rezultatu z pracy [AGG19], gdzie wykazano α-hölderowską ciągłość przy dodatkowym założeniu na miarę związanym z zanikiem miary wąskiego pierścienia. Następny bardzo istotny wynik uzyskany w rozprawie to regularność klasy $AMV^p_{loc}(X)$. Udowodniono, że gdy p jest odpowiednio duże to klasa ta jest zawarta w przestrzeni funkcji α-hölderowsko ciągłych z dowolnym $\alpha \in (0, 1)$. Ostatni resultat tej części rozprawy, o którym chcę wspomnieć w mojej recenzji, jest powiązany z rozdziałem drugim. W przypadku gdy (X, d, μ) jest przestrzenią euklidesową z miarą $\mu = \omega \mathcal{H}^n_{|\Omega}$ i dodatnia funkcja ω jest lokalnie lipszicowska udowodniono, że dla $p \in (1, +\infty)$ zachodzi równość $W^{1,p}(\Omega) \cap AMV^p_{loc}(\Omega) = W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ oraz dla $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$

$$\Delta^\mu_r u \to \frac{1}{2}\mathrm{div}(M\nabla u) + (\nabla \ln \omega, M\nabla u)$$

gdzie granica przy $r \to 0^+$ jest w sensie przestrzeni $L^p_{loc}(\Omega)$ oraz macierz M jest złożona z momentów wyliczonych dla kuli jednostkowej z miarą $\mathcal{H}^n$. Udowodniony wynik jest bardzo ciekawą charakteryzacją granicy r-laplasjanów.

Dowody wszystkich twierdzeń są bardzo starannie zredagowane, co znacznie ułatwia studiowanie rozprawy. Ponadto warta podkreślenia jest bardzo dobra redakcja rozprawy. Każdy rozdział zawiera historyczne wprowadzenie do rozważanej tematyki oraz niezbędne definicje wszystkich używanych narzędzi matematycznych. Warto też podkreślić, że rozprawa zawiera rezultaty z trzech publikacji doktoranta. Dwie prace już są opublikowane: samodzielna w Electronical J. of Differential Equations oraz wspólna z promotorem i dwoma innymi współautorami w Nonlinear Analysis. Trzecia praca jest umieszczona na ArXiv.

Podsumowując całą recenzję uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska

Mean value property approach to various notions of harmonicity on Euclidean spaces, Carnot groups and metric measure spaces autorstwa pana magistra *Antoniego Kijowskiego*

spełnia wszystkie ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki i wnioskuję o dopuszczenie pana magistra *Antoniego Kijowskiego* do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński